

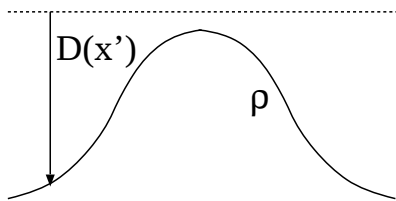
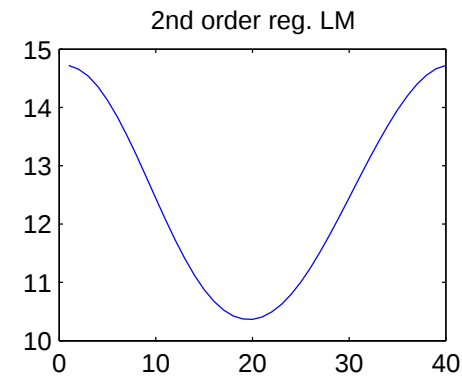
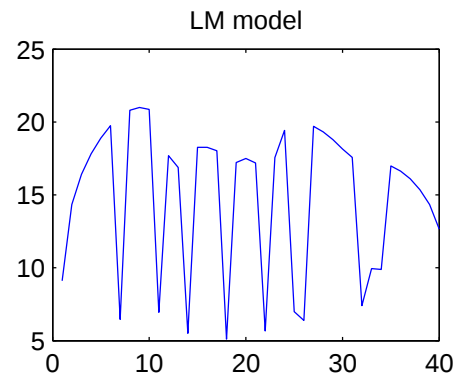
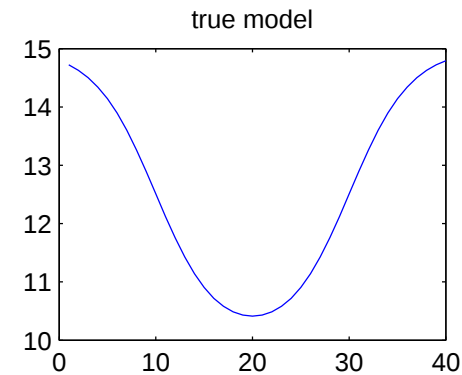
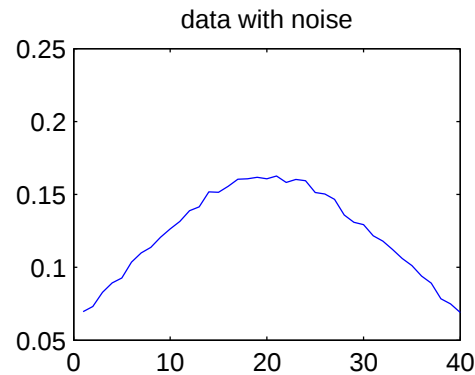
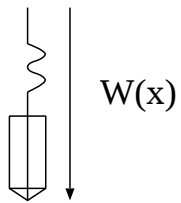


Métodos de inversión en la investigación de la alta atmósfera

D. L. Hysell

Earth and Atmospheric Sciences, Cornell University, Ithaca, New York

anomalía de la gravedad



$$W(x) = \rho M G \int \frac{D(x') dx'}{(D^2 + (x - x')^2)^{3/2}}$$

problemas de inversión

$$\overbrace{G}^{\text{teoría}} \left(\overbrace{m}^{\text{modelo}} \right) = \overbrace{d}^{\text{datos+‘ruido’}}$$

- **discreto** $\underbrace{G}_{\mathbb{R}^{n \times m}} \underbrace{m}_{\mathbb{R}^m} = \underbrace{d}_{\mathbb{R}^n}$ o continuo $\int G(\psi, x) m(x) dx = d(\psi)$
- **lineal** o **nonlineal**
- e.g. convolución, transformada de Fourier, Abel, Radon, Hilbert, ...

- existencia, unicidad, estabilidad
- “Riemann-Lebesgue Lemma”

problemas de inversión

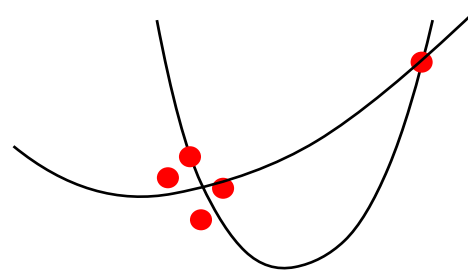
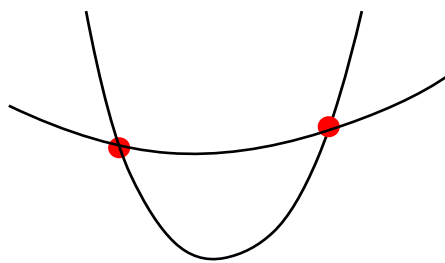
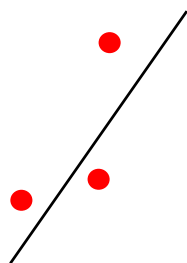
- filtrado (tomografía, SAR, radar planetario, decodificación de pulsos)
- métodos de longitud (vector velocidad, análisis de los perfiles de retardo)
- métodos de MAP (Abel inversión, imágenes con apertura sintética)

Estos son equivalentes!

métodos de longitud

$$Gm = d, G \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{rango}[G]=p$$

	min. cuadrados	longitud minima	min. cuadrados con pesos amortiguados
rango	$p = m < n$	$p = n < m$	$p < n, m$
nombre	sobredeterminado	bojodeterminado	determinado mixto
signif.	sin solución exacta	soluciones multiples	aproximadas multiples
min.	$(Gm - d)^t C_d^{-1} (Gm - d)$	$m^t C_m^{-1} m$	$e^t C_d^{-1} e + \alpha^2 m^t C_m^{-1} m$
m_{est}	$[G^t C_d^{-1} G]^{-1} G^t C_d^{-1} d$	$C_m^{-1} G^t [G C_m^{-1} G^t]^{-1} d$	$[G^t C_d^{-1} G + \alpha^2 C_m^{-1}]^{-1} G^t C_d^{-1} d$ $C_m^{-1} G^t [G C_m^{-1} G^t + \alpha^2 C_d^{-1}]^{-1} d$
	max chance	la navaja de Occam	0, 1, 2 regularización



Moore Penrose pseudoinversa: existencia, unicidad, estabilidad

$$\begin{aligned}
 G &= U \Lambda V^t, \quad Gm = d \quad Gx = 0 \quad x^t G = 0 \\
 &= \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \text{columna} & \text{izquierdo} \\ \text{espacio} & \text{espacio nulo} \end{array} \right)}_{n \times n} \underbrace{\left(\begin{array}{cc} \Lambda_{p \times p} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{n \times m} \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{espacio de filas} \\ \hline \text{espacio nulo} \end{array} \right)}_{m \times m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^\dagger &= V \Lambda^{-1} U^t, \quad m = G^\dagger d \\
 &= \underbrace{\left(\begin{array}{cc} V_{m \times p} & V_{m \times (m-p)} \end{array} \right)}_{m \times m} \underbrace{\left(\begin{array}{cc} \Lambda_{p \times p}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{m \times n} \underbrace{\left(\begin{array}{c} U_{p \times n}^t \\ U_{(n-p) \times n}^t \end{array} \right)}_{n \times n} \\
 &= V_{m \times p} \Lambda_{p \times p}^{-1} U_{p \times n}^t
 \end{aligned}$$

– no. condición $\equiv \Lambda_{\max} / \Lambda_{\min}$

regularización cuadrática

los siguientes son equivalentes:

- gSVD usando factores de filtro de la forma $f_i = (s_i^2 + \alpha^2)/s_i^2$, donde s_i son los valores singulares, y α es el así-conocido parámetro de regularización. La matriz de covarianza de datos puede ser incorporada transformando y escalando G y d .
- Minimización de función de costo, $(Gm - d)^t C_d^{-1} (Gm - d) + \alpha^2 m^t C_m^{-1} m$, donde $C_m^{-1} = L^t L$. El modelo que ejecuta es $m^{\text{est}} = (G^t C_d^{-1} G + \alpha^2 C_m^{-1})^{-1} G^t C_d^{-1} d$. Esta estrategia se llama los mínimos cuadrados con pesos amortiguados.
- Minimización de los cuadrados mínimos a través del gradiente conjugado con pesos con suposición inicial $m^{\text{est}} = 0$ y con una terminación temprana de la iteración consistente con algún valor finito α .

regularización cuadrática II

- mínimos cuadrados aumentados:

$$\min \left\| \begin{pmatrix} C_d^{-1/2} G \\ \alpha L \end{pmatrix} m - \begin{pmatrix} C_d^{-1/2} d \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

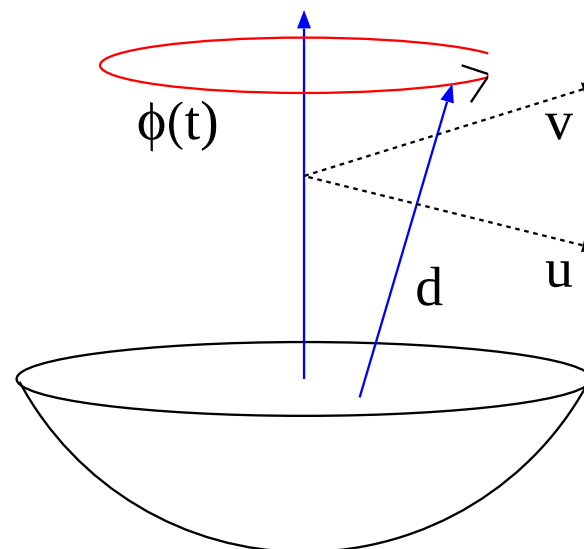
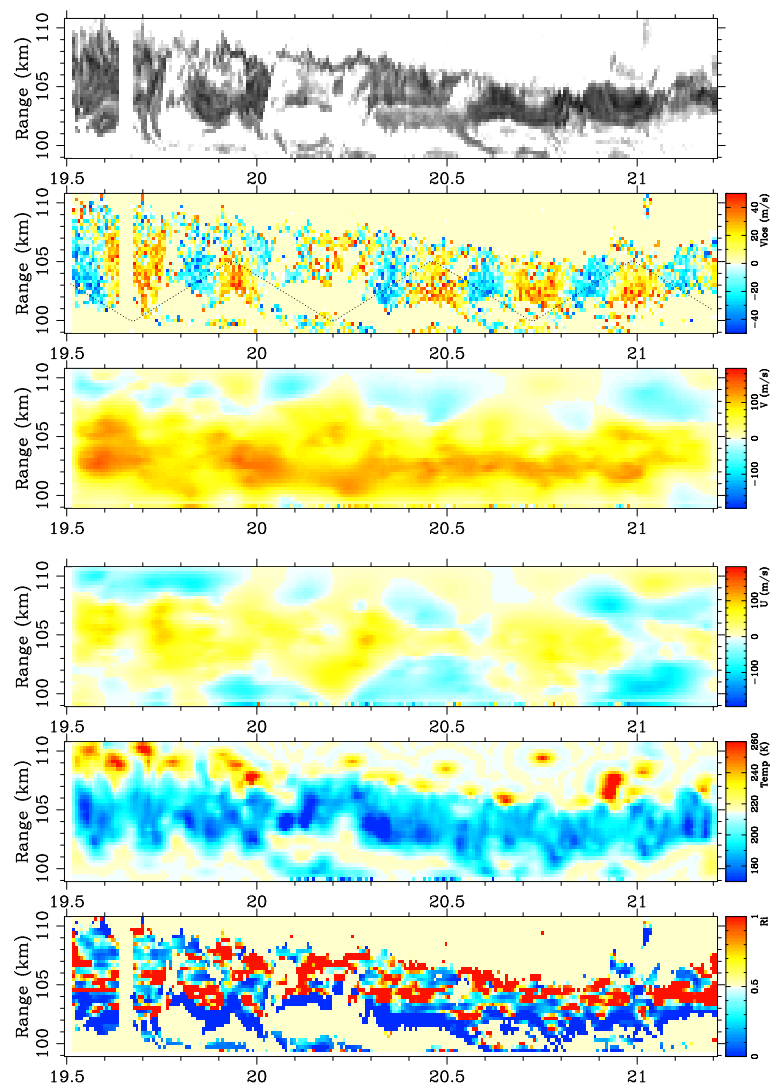
donde $C_d^{-1/2t} C_d^{-1/2} = C_d^{-1}$.

- Resolviendo la ecuación característica

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} G^t C_d^{-1} & \alpha L^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ \alpha L \end{pmatrix} m \\ &= \begin{pmatrix} G^t C_d^{-1} & \alpha L^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

el resultado es el estimador de cuadrados mínimos con pesos amordiguados como se mencionó.

el movimiento del plasma sobre Arecibo

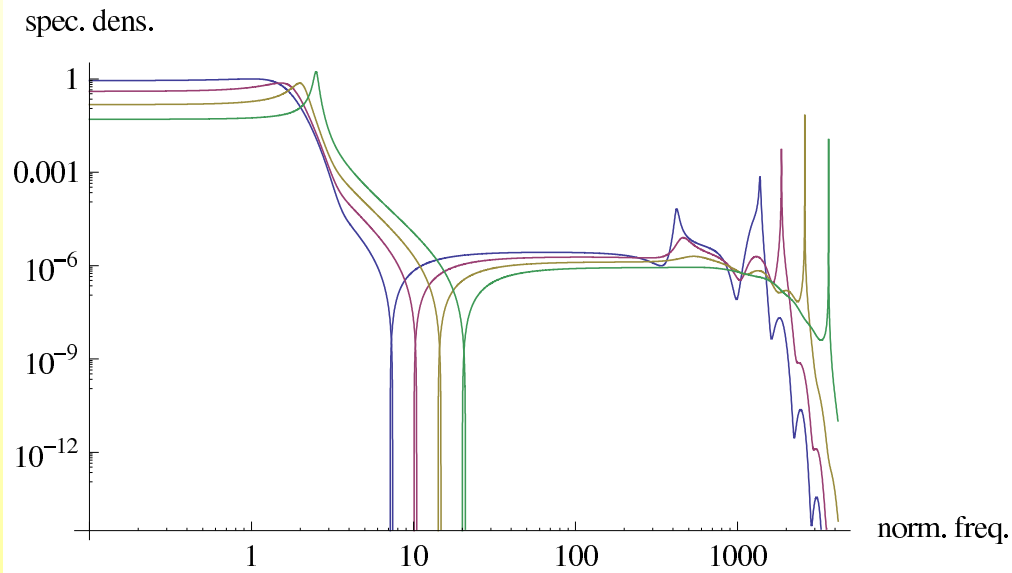


$$\begin{bmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ v(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

aplicaciones de Jicamarca

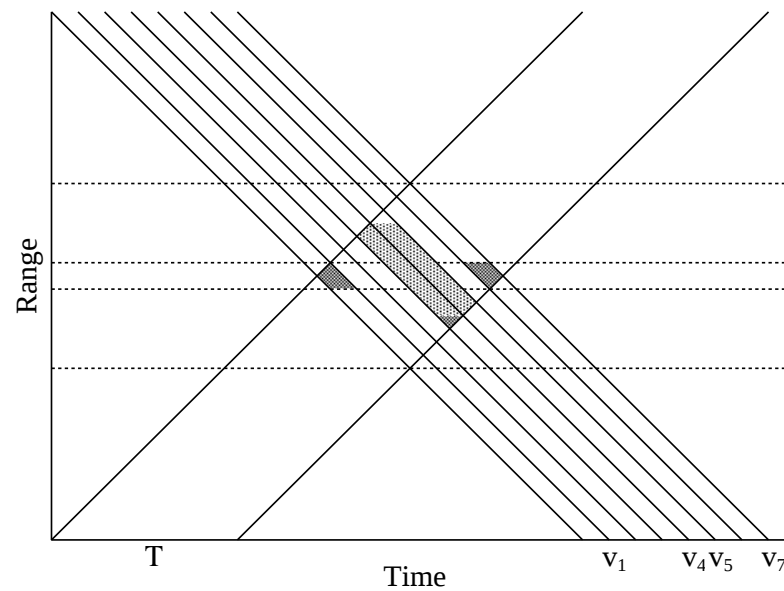


dispersión incoherente

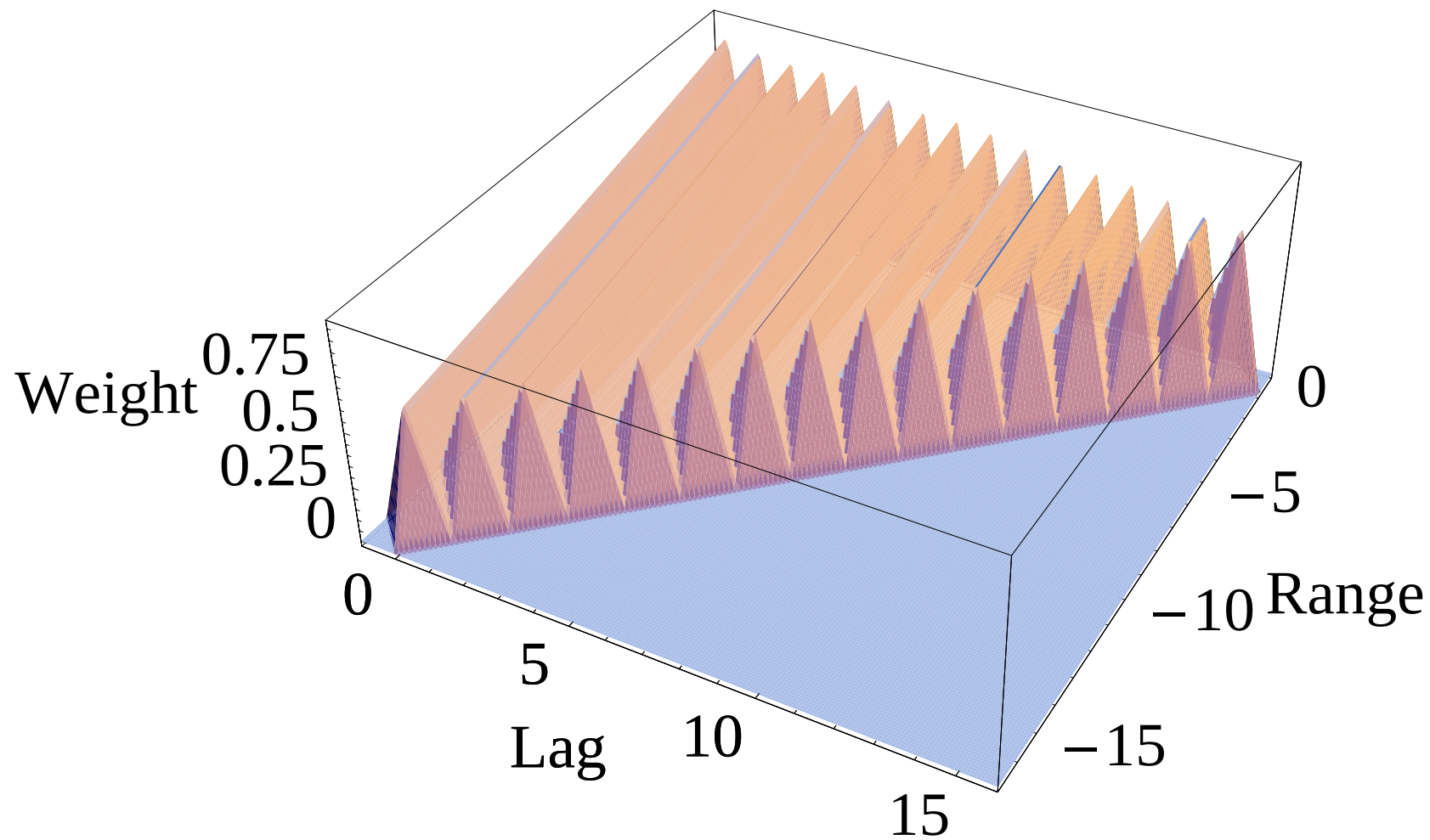


$$T_e/T_i = 1, 2, 4, 8$$

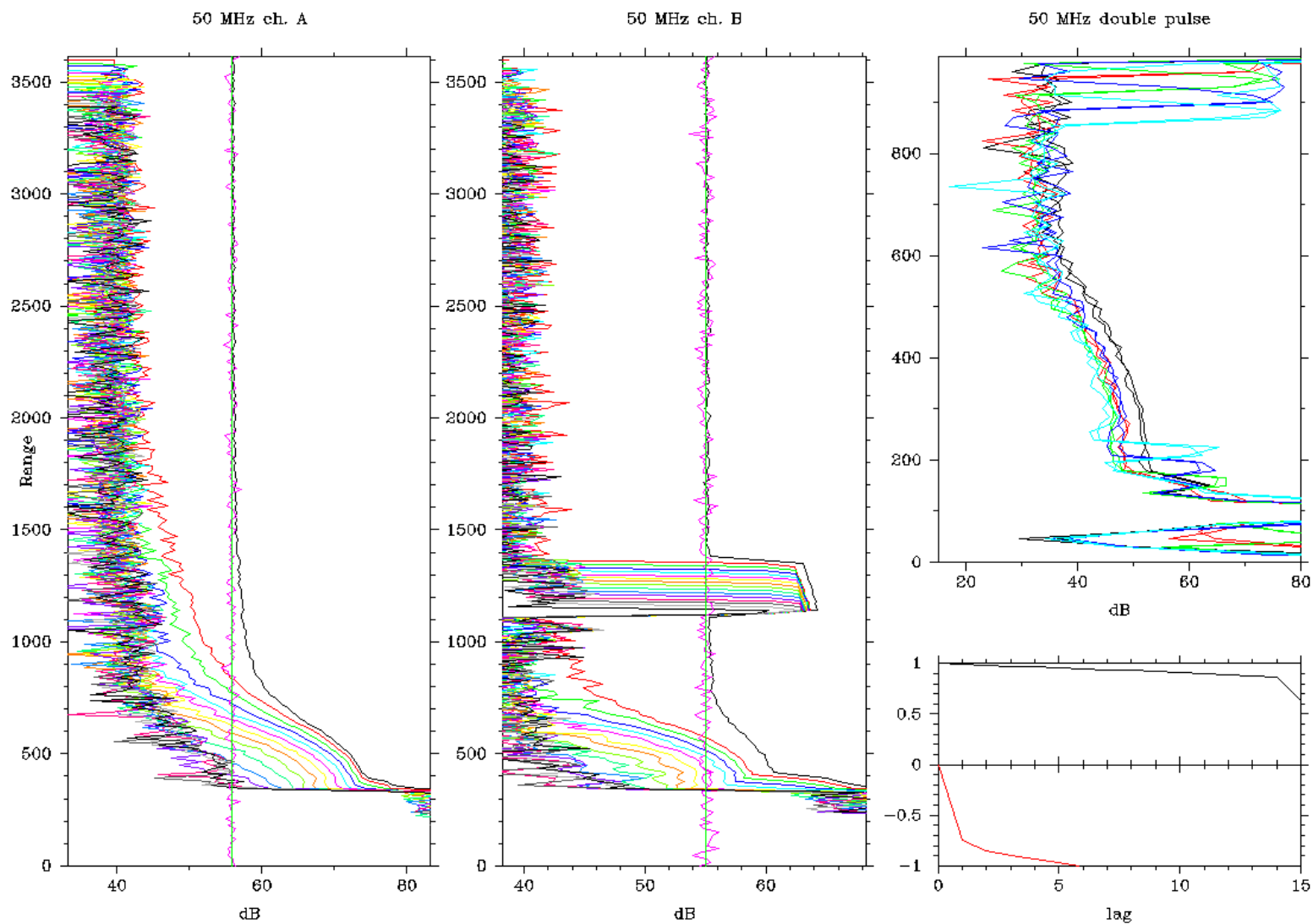
rango vs. tiempo



función del instrumento



los perfiles de retardo del radar

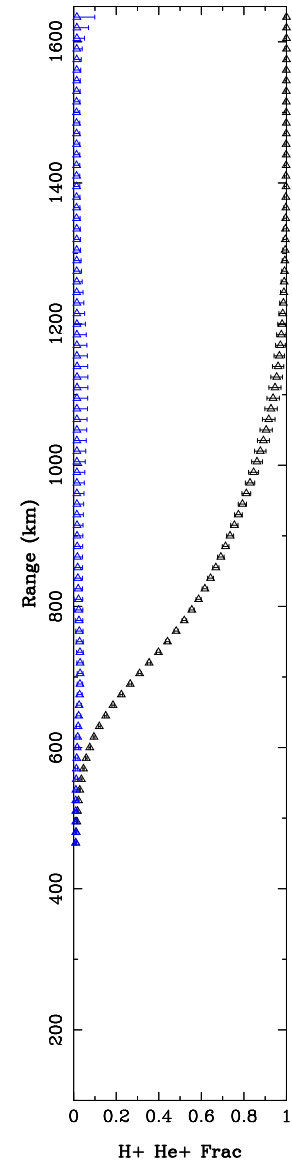
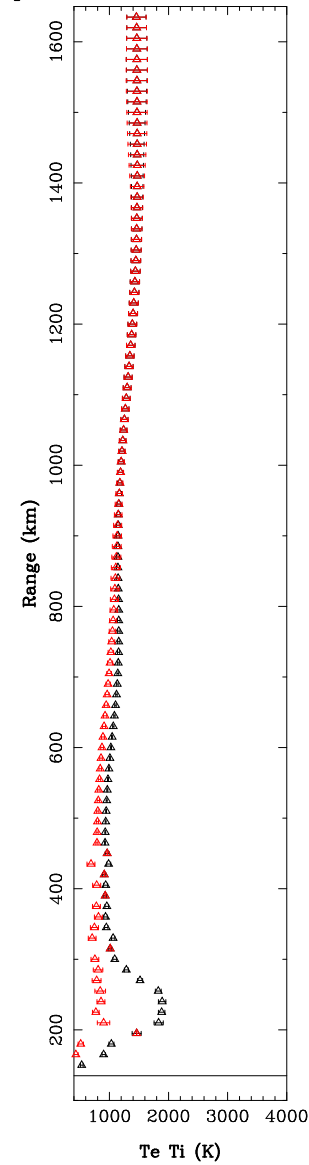
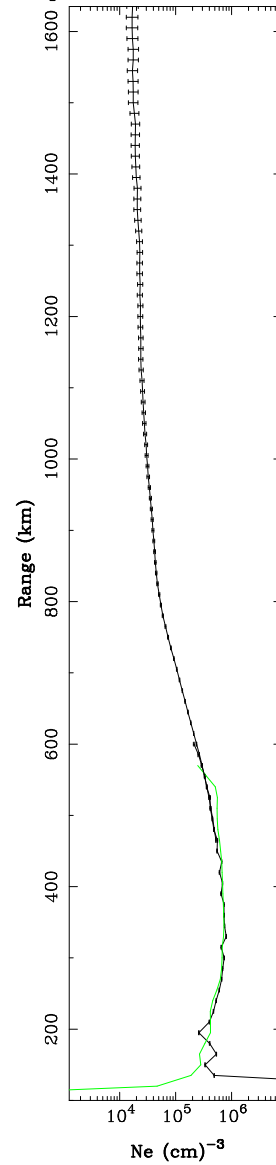
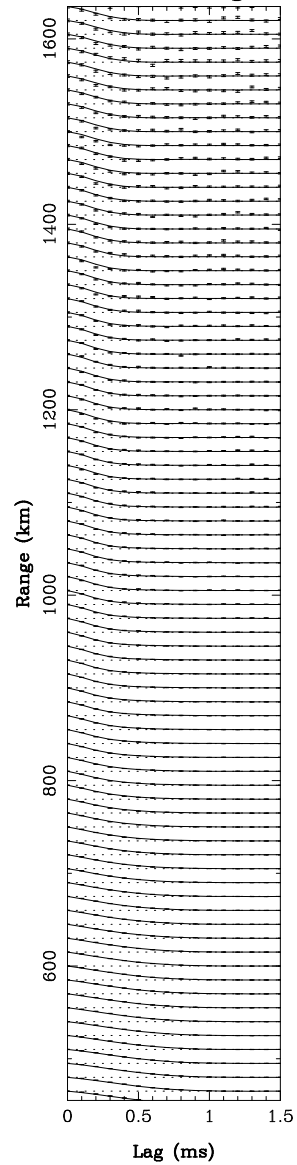
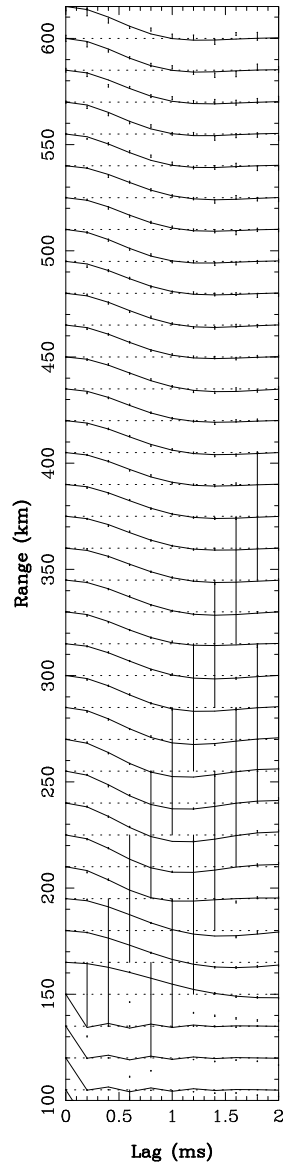


parámetros de regularización

mínimos cuadrados no lineales aumentados

- la norma del error predicción $e^t C_d^{-1} e$
- $\|T_e''\|_2^2 \|T_i''\|_2^2$ aspereza de la temperatura
- $T_i/T_e \leq 1$ razón de temperatura
- $\|H^{+''}\|_2^2$ aspereza del ion hidrógeno
- fracción de la composición $[0,1]$

R0J Long Pulse: Thu Apr 20 12:00:18 2006 Thu Apr 20 12:10:01 2006

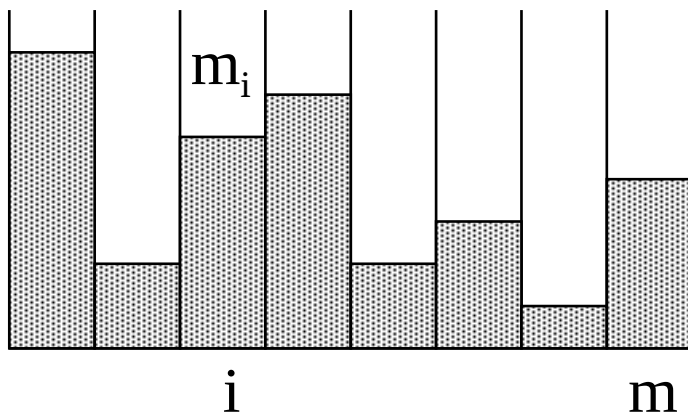


métodos de MAP, teorema de Bayes

$$P(m|d) = \frac{P(d|m)P(m)}{P(d)}$$

$$P(d|m) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |C_d|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (Gm-d)^t C_d^{-1} (Gm-d)}$$

$$P(m) = ?, e^{\alpha S}$$



$$M = \sum_{i=1}^m m_i$$

$$\text{perm} = \frac{M!}{\prod_{i=1}^m m_i!}$$

$$S = - \sum_{i=1}^m m_i \log(m_i/M)$$

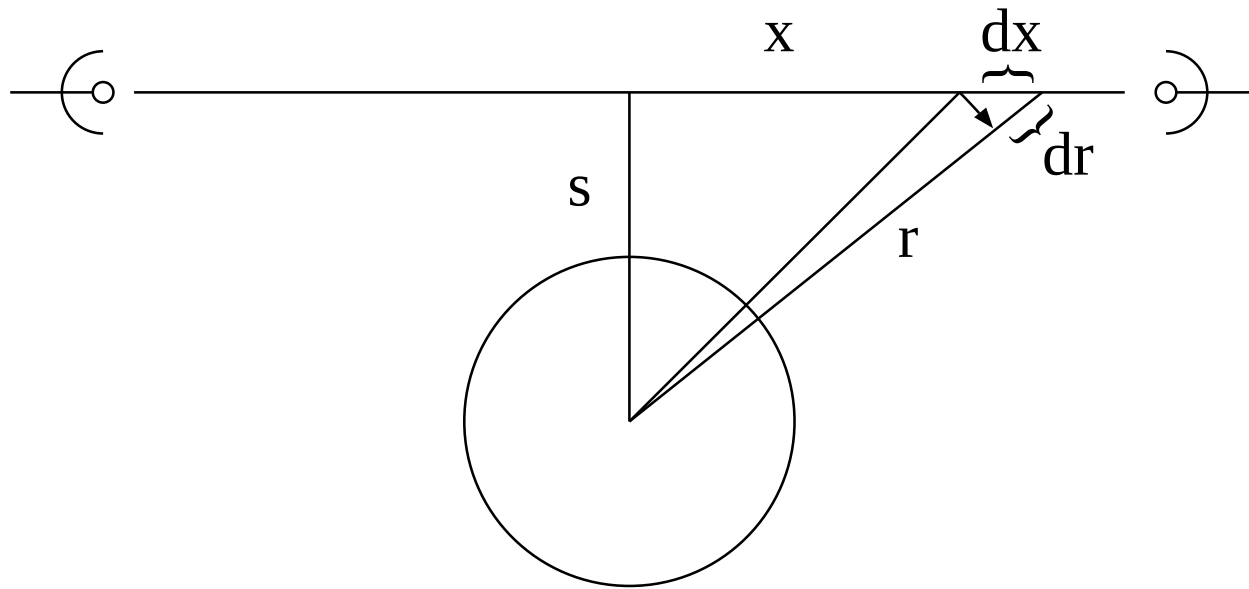
$$E = S + \lambda^t(d + e - Gm) + \Lambda(e^t C_d^{-1} e - \Sigma)$$

$$m_i = M \frac{e^{-\lambda^t G^{[,i]}}}{Z}$$

$$Z = \frac{\hat{I}^t m}{M}$$

$$E = \lambda^t(d + e) + M \log Z + \Lambda(e^t C_d^{-1} e - \Sigma)$$

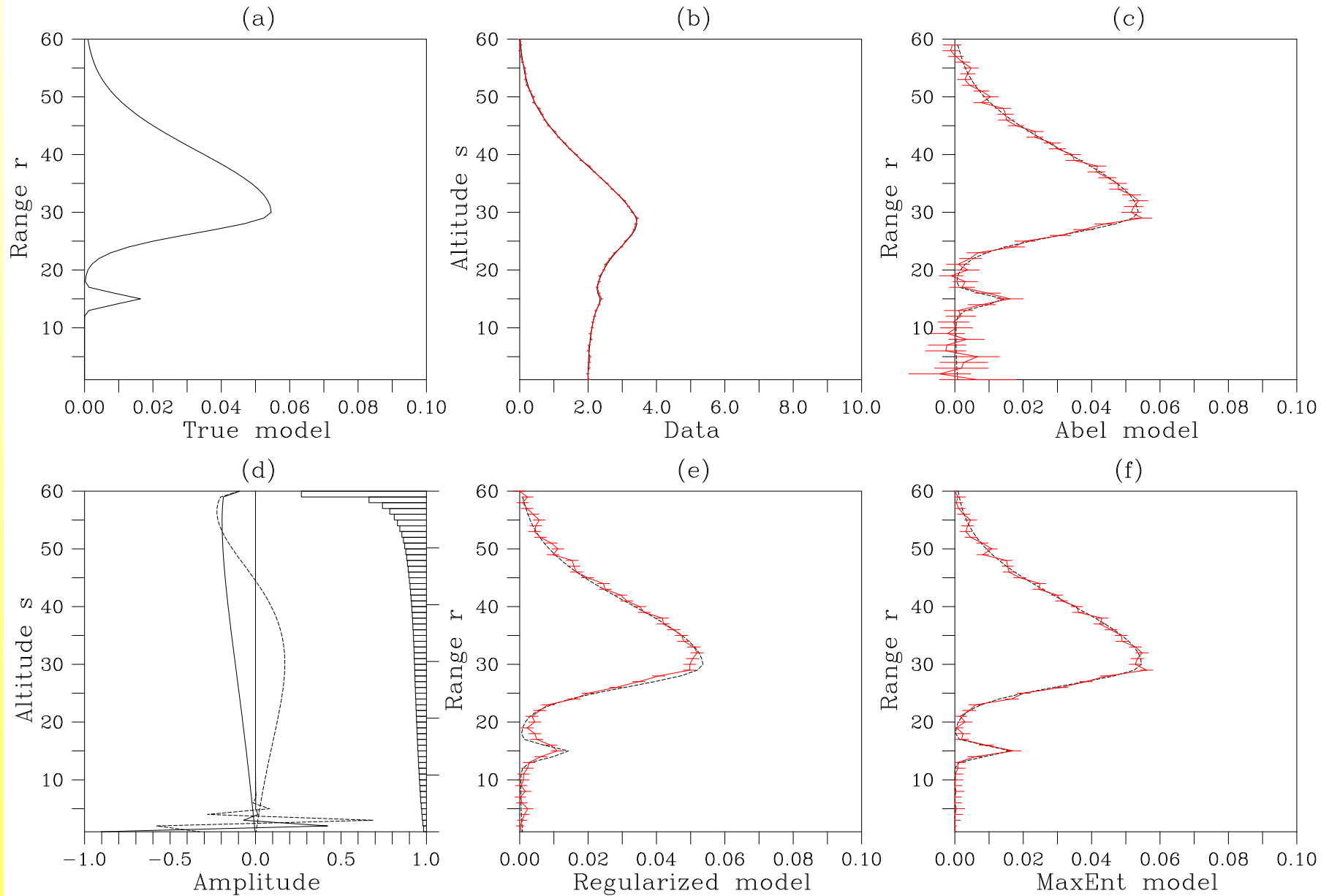
transformada de Abel



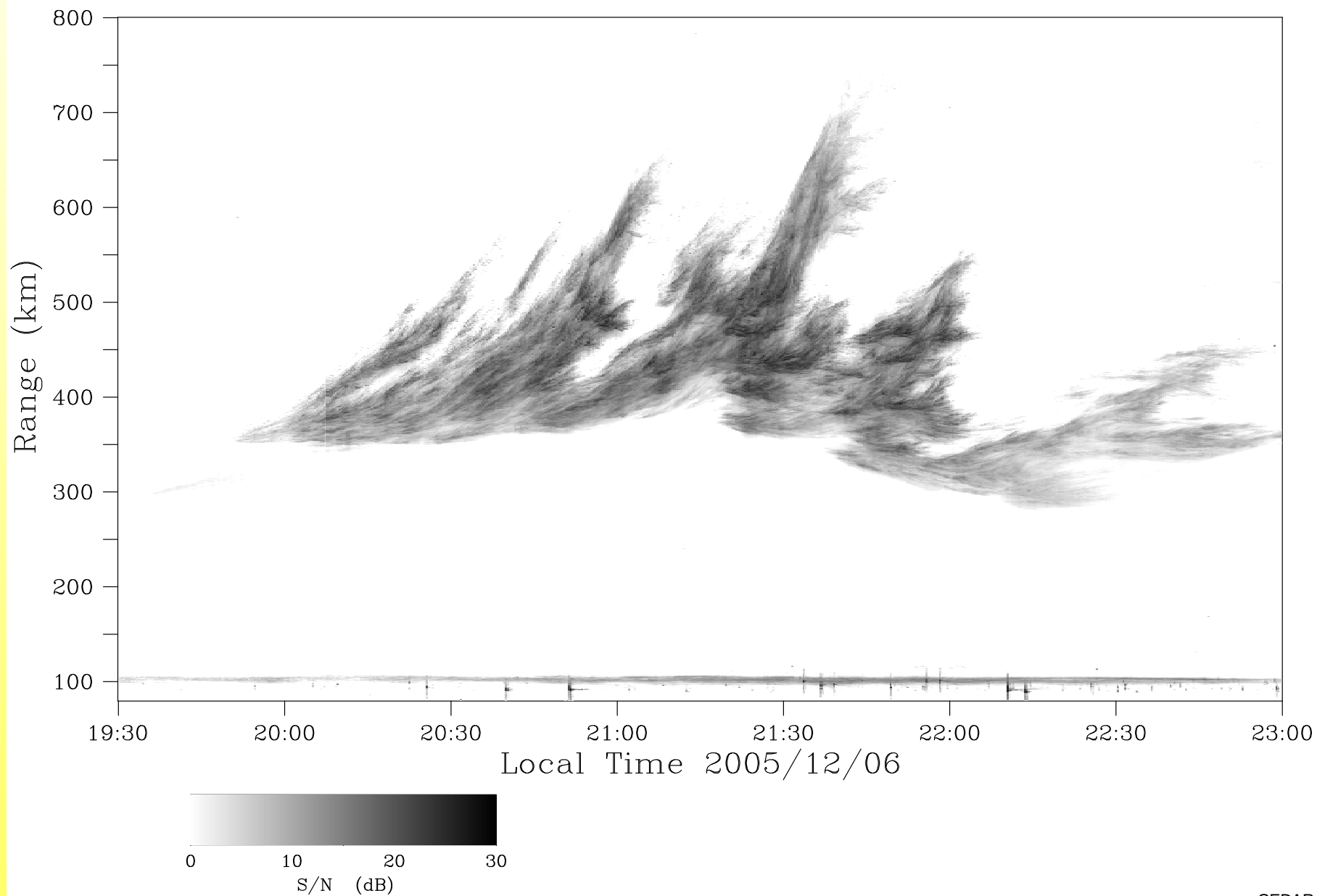
$$\phi(s) = 2C \int_s^\infty n_e(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

$$n_e(r) = -\frac{1}{\pi C} \int_r^\infty \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}$$

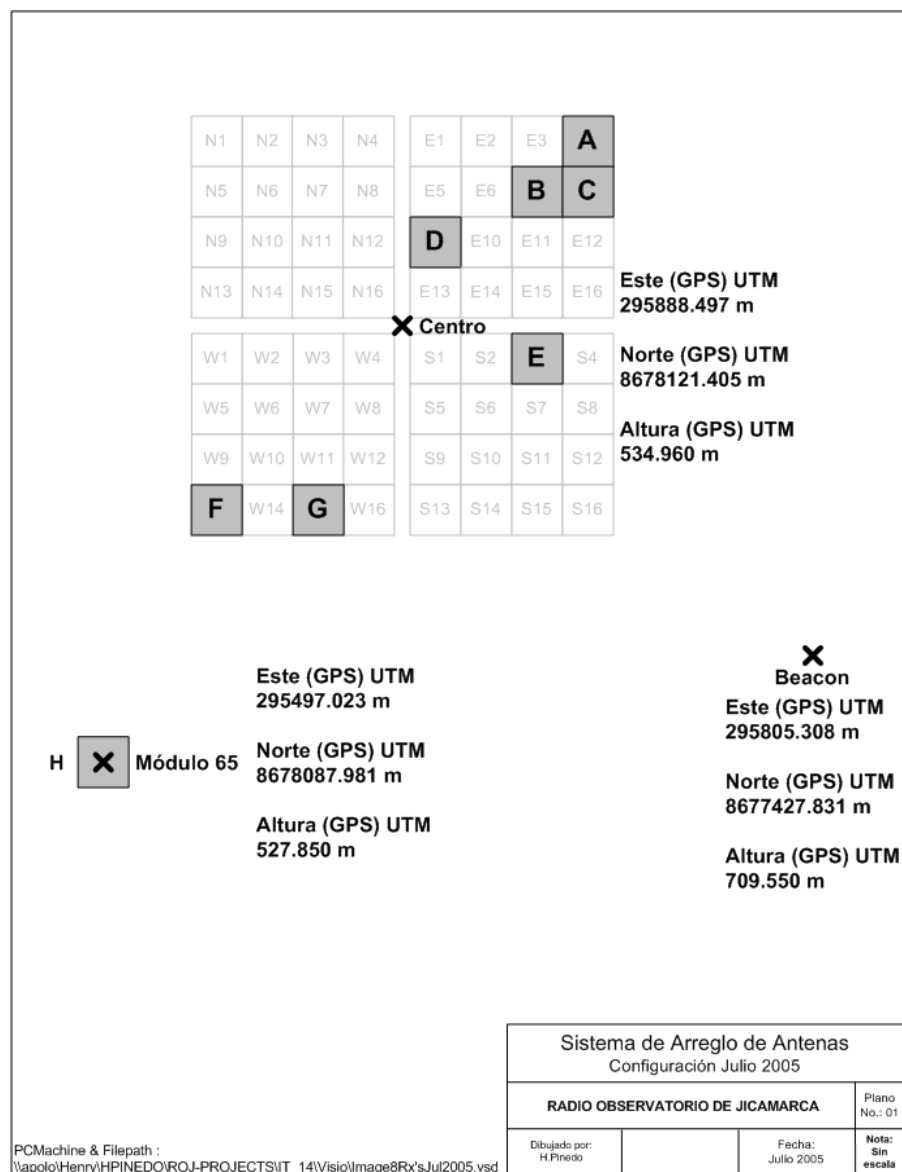
simulación de ocultación

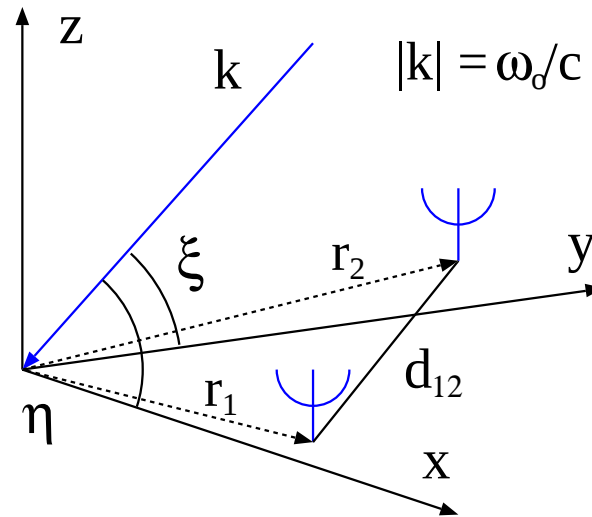


irregularidades del plasma ionosférico



imágenes con apertura sintética

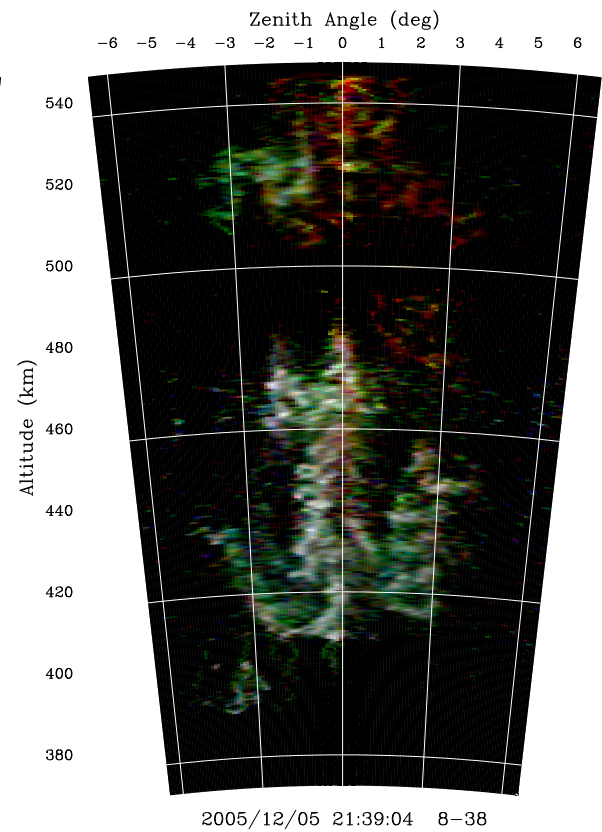
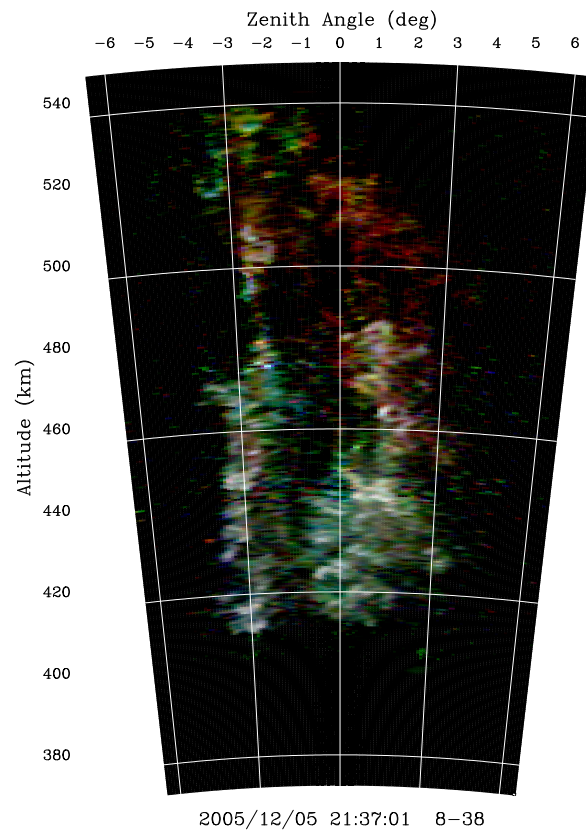
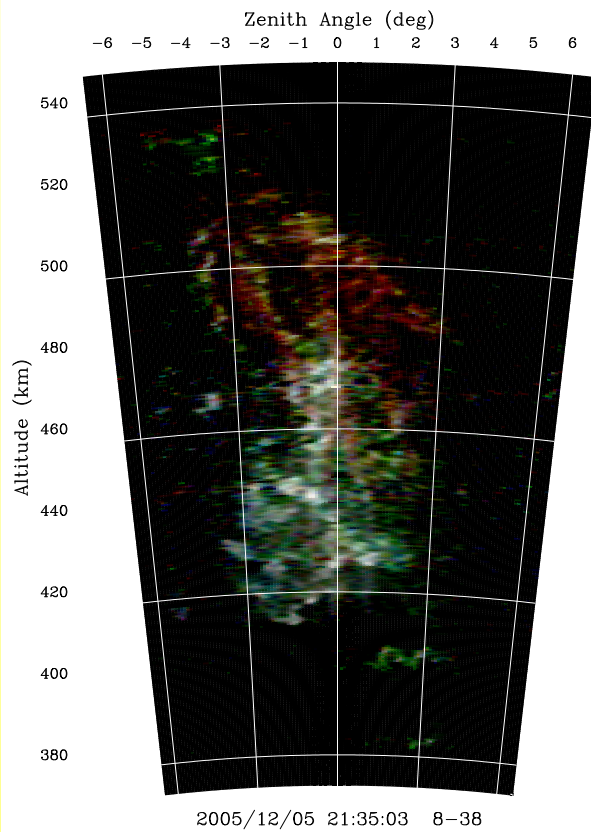




$$\begin{aligned}
 & \langle V^*(\mathbf{r}_1, \omega) V(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \\
 &= \int \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}} B(\eta, \xi, \omega) \underbrace{\mathcal{A}(\eta, \xi)}_{\text{illumination}} e^{ik(d_x \eta + d_y \xi + d_z \sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2})}
 \end{aligned}$$

$$d(kd_x, kd_y, \omega; \omega_o) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} m(\eta, \xi, \omega) \mathcal{A}(\eta, \xi)$$

imágenes de F dispersa



movie 1 movie 2

- Aster, R. C., B. Borchers, and C. H. Thurber, *Parameter Estimation and Inverse Problems*, Elsevier, New York, 2005.
- Gull, S. F., Developments in Maximum Entropy data analysis, in *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, edited by J. Skilling, pp. 53–71, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.
- Jaynes, E. T., Where do we go from here?, in *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*, edited by C. R. Smith and W. T. Grandy, Jr., chap. 2, pp. 21-58, D. Reidel, Norwell, Mass., 1985.
- Kaipio, J., and E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer Verlag, 2004.
- Menke, W., *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Academic, New York, 1984.
- Parker, R. L., *Geophysical Inverse Theory*, Princeton, 1994.
- Sen, M. K., and P. L. Stoffa, *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*, Elsevier, New York, 1995.
- Tarantola, A., *Inverse Theory*, Elsevier, New York, 1987.