

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

ESCUELA DE GRADUADOS



PROPAGACION ANOMALA DE ONDAS METRICAS DE LA  
BANDA VHF PARA EL CASO LIMA-PARACAS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADEMICO DE MAGISTER EN  
FISICA

PRESENTADA POR  
PERCY JESUS CONDOR PATILONGO

LIMA-PERU  
2001

## RESUMEN

El presente trabajo da una explicación al fenómeno de Propagación Anómala, que se da en la costa peruana específicamente entre Lima y Paracas, y que hace posible captar señales de TV y radio sin necesidad de una retransmisora. Paracas está a una distancia de 200 km de Lima, fuera del horizonte de alcance de las señales transmitidas por las antenas ubicadas en el Morro Solar, Lima. Esta propagación anómala se debe en gran parte a la reflexión parcial y a la difracción que sufren las ondas métricas (banda VHF), cuando éstas inciden sobre una capa de inversión de temperatura con un ángulo rasante con respecto a la horizontal, es decir, un ángulo muy pequeño de unos 14,7 mrad. En esta capa hay un cambio brusco del índice de refracción  $n$ , que puede ser inclusive un salto brusco discontinuo, de unas 37 N unidades ó más.

El empleo del coeficiente de reflexión de Fresnel nos permite calcular la potencia recibida en el punto de recepción. Para esto se propone un perfil del índice de refracción con la forma de la función error, compatibles con las condiciones observadas del perfil de la temperatura y humedad relativa con respecto a la altura. Por este motivo se ha estudiado las condiciones meteorológicas de la costa peruana, cuando sucede este fenómeno, y su comportamiento anual. Se puede decir que hay una inversión de temperatura y caída abrupta de la humedad atmosférica cercanos a los 1000 msnm, se ha verificado que cuando la temperatura sube en la inversión, la humedad relativa disminuye en la misma forma, pero inversa. La potencia recibida en base al modelo propuesto es de unos -70 a -50 dbm, según el espesor de la inversión, a la que corresponde una razón de señal a ruido SN de 40 a 60 db. El valor del campo eléctrico correspondiente en el punto de recepción es de alrededor de unos 35 a 56 db sobre  $1\mu v/m$ .

## ABSTRACT

This work gives an explanation of the phenomenon of Anomalous Propagation that occurs on the Peruvian coast, specifically between Lima and Paracas. It is possible to receive signals of TV and radio in Paracas with no retransmission. Paracas is located 200 km south from Lima, beyond the horizon of the antennas located in Morro Solar, Lima. This phenomenon is mainly due to partial reflection and the diffraction suffered by the meter-scale VHF radio waves during propagation, when they reach a temperature inversion layer with a grazing angle respect to the horizontal that is a very small, of the order of 14.7 mrad. In this layer there is an abrupt change of refractive index  $n$ , which can be even discontinuous, with a change of 37 N units or more.

The use of the Fresnel reflection coefficient permits us to calculate the received power at reception. We model a profile of the refractive index, as an error function, in agreement with our and previous observations of the temperature and relative humidity profile with respect to height. We have studied these meteorological aspects of the Peruvian coast as well as with its annual behavior. We have observed that there is a strong temperature inversion and a abrupt fall of the humidity of the atmosphere at about 1000 m of altitude and verify that when the temperature rises, the relative humidity decreases in the same way but in an inverse manner. The estimated power received is between -70 dbm to -50 dbm, depending on the thickness of the inversion. To this it corresponds a signal/noise ratio (SN) between 40 to 60 db. The corresponding value of the electric field at the receiving point is 35 to 56 db over 1  $\mu\text{V}/\text{m}$  approximately.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se llevo a cabo a propuesta de y con el asesoramiento del Dr. Ronald Woodman P., Presidente Ejecutivo del Instituto Geofísico del Perú. Por esto mi agradecimiento por su ayuda y apoyo a la ciencia. También agradezco al personal del Radio Observatorio de Jicamarca en especial a Fernando Villanueva, Luis Condori, Darwin Córdova, Francisco Buendia, Francisco Córdova, Victor Quesada, Jorge Chau y el apoyo de material bibliográfico y de computadoras prestado por el Observatorio de Jicamarca donde se realizó este trabajo.

Un agradecimiento también por la ayuda en la revisión de la redacción del texto del trabajo, a Soledad Jimenez y Myriam Pajuelo. Un especial agradecimiento por la gran ayuda y consejos en la redacción de este texto para Rocio Ferrel. A mis padres que me comprenden y apoyan, como también a mis hermanos.

*A los que estan aqui y no estan por servir de fuente de imaginación y inspiración.*

*Dedicado a Rosario S.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Propagación de ondas electromagnéticas en la Troposfera</b>	<b>5</b>
2.1. Propagación en un medio no homogéneo y estratificado . . . . .	5
2.2. Índice de refracción para ondas de radio . . . . .	7
2.2.1. Método de Trazado de rayos ( <i>Ray Tracing</i> ) . . . . .	10
2.3. Ley de Snell para la Tierra esférica estratificada . . . . .	12
2.4. Propagación anómala . . . . .	13
2.4.1. Refracción y reflexión total . . . . .	13
2.4.2. Reflexión parcial . . . . .	14
2.4.3. Scattering Troposférico . . . . .	15
2.5. Ductos . . . . .	16
2.6. Otros mecanismos que afectan la propagación . . . . .	17
2.7. Métodos para resolver la ecuación de propagación de ondas . . . .	17
2.7.1. Método WKB . . . . .	18
<b>3. Meteorología de la costa peruana</b>	<b>20</b>
3.1. Introducción . . . . .	20
3.1.1. Temperatura, Presión y Humedad Relativa . . . . .	20
3.2. El Clima y La inversión de Temperatura en la Costa Peruana . .	21
3.3. Comportamiento de la troposfera por estaciones en Lima según datos de 20 años (1957-1978) . . . . .	24
3.3.1. Temperatura y humedad relativa . . . . .	24
3.3.2. Velocidad de los vientos . . . . .	26

<b>4. Propagación más allá del horizonte entre Lima y Paracas</b>	<b>29</b>
4.1. Características . . . . .	29
4.2. Perfiles de temperatura y humedad relativa . . . . .	29
4.3. Perfil del índice de refracción $n$ . . . . .	34
4.4. Otros Perfiles . . . . .	34
4.5. Variación de $n$ según la variación de la temperatura y humedad relativa dentro de la capa de inversión . . . . .	34
4.6. Perfil de $n$ con la forma de la función Error . . . . .	38
4.7. Potencia recibida . . . . .	39
4.8. Coeficiente de reflexión de Fresnel para una capa de inversión elevada	42
4.8.1. Cambio discontinuo . . . . .	42
4.8.2. Capa con espesor . . . . .	43
4.9. Coeficiente de reflexión para el perfil ideal . . . . .	45
4.10. Ruido que afecta la transmisión . . . . .	46
4.11. Relación Señal - Ruido (SN) . . . . .	48
4.12. Zonas de Fresnel . . . . .	49
4.13. Criterio de Rugosidad de Rayleigh . . . . .	52
4.14. Caso para Radio Programas del Perú (RPP-89,7 Mhz). . . . .	52
4.14.1. Características . . . . .	52
4.14.2. Casos de la variación de $n$ y cálculo de la Potencia recibida	53
4.14.3. Relación SN . . . . .	58
4.14.4. Campo eléctrico recibido . . . . .	58
4.14.5. Primera zona de Fresnel . . . . .	60
4.15. Casos similares . . . . .	61
<b>5. Conclusiones</b>	<b>66</b>
<b>A. Índice de Refracción del aire para las ondas de radio</b>	<b>73</b>
<b>B. Cálculo geométrico del ángulo de incidencia y reflexión sobre un     medio con un cambio brusco del índice de refracción <math>n</math> para la     propagación más allá del horizonte</b>	<b>76</b>
B.1. Medio con un cambio discontinuo de $n$ . . . . .	76

B.2. Alternativa de propagación en un medio discontinuo . . . . .	78
B.3. Otra forma para deducir el ángulo de incidencia . . . . .	79
B.4. Propagación en un medio con cambio brusco y continuo de $n$ . . .	80
<b>C. ZONAS DE FRESNEL</b>	<b>81</b>



# Índice de figuras

2.1. Presión de saturación del vapor de agua en función de la temperatura	9
2.2. Ductos . . . . .	14
3.1. Perfiles mensuales de temperatura y humedad relativa de un promedio de 20 años . . . . .	27
4.1. Perfiles T,Rh y N . . . . .	31
4.2. Perfil T,Rh y N . . . . .	32
4.3. Temperatura y Humedad relativa . . . . .	33
4.4. Perfil Ideal . . . . .	35
4.5. Otro perfil . . . . .	37
4.6. Perfil de la refractividad (N) partiendo de una función error erf en la capa de inversión . . . . .	40
4.7. Intensidad del campo eléctrico en dB para tres frecuencias VHF, versus la distancia de recepción para una antena transmitiendo a 1kw en polarización horizontal. . . . .	41
4.8. El número K para medir la escala de las irregularidades . . . . .	45
4.9. Coeficiente de Fresnel . . . . .	47
4.10. Temperatura del ruido . . . . .	50
4.11. Zonas de Fresnel . . . . .	50
4.12. Caso 1. Camino de propagación cuando el medio tiene un índice de refracción de la atmósfera para ondas de radio es constante y sufre un cambio discontinuo a una cierta altura. . . . .	55

4.13. Caso 2. Camino de propagación cuando el índice de refracción de la atmósfera para ondas de radio decrece hasta una altura, donde tiene una discontinuidad, para después seguir disminuyendo. . . .	55
4.14. Caso 3. Trayectoria del rayo de propagación cuando el índice de refracción de la atmósfera para las ondas de radio varía, tomando la forma de la función erf dentro de una capa, teniendo una gradiente negativa el índice de refracción. . . . .	57
4.15. Caso de California . . . . .	63
4.16. California con inversión elevada . . . . .	63
4.17. Efecto Santana . . . . .	64
4.18. Perfil de T en un Santana . . . . .	64
4.19. Correlación de la señal recibida en California con la altura de la base de la inversión de temperatura . . . . .	65
4.20. Señal registrada para el camino San Diego - San Pedro cuando hubo inversión. . . . .	65
B.1. Camino de propagación en un medio homogéneo con una reflexión y rango de propagación de 200 km. . . . .	77
C.1. Primera zona de Fresnel . . . . .	82

# Índice de cuadros

4.1. T y Rh ideal . . . . .	36
4.2. Variación de n . . . . .	38
4.3. Características de transmisión de RPP . . . . .	53
4.4. Coeficiente de reflexión para un perfil en forma de erf(z) con varios valores del espesor . . . . .	58
4.5. Relación SN para un valor de L . . . . .	59
4.6. Valores de la señal captada por reflexión parcial en la capa de inversión . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introducción

El tema que abarca esta tesis es el estudio de la propagación anómala que se produce en las señales de TV y radio dentro de la banda VHF en las costas del Perú, específicamente entre Lima y Paracas. En la zona de Paracas y Pisco en general, los pobladores pueden captar emisoras de FM y algunas televisoras de la ciudad de Lima sin el empleo de retransmisores. Pisco y Paracas están aproximadamente a 200 km de Lima, fuera del rango normal de cobertura para estas señales, y definitivamente fuera del rango del radio horizonte de las antenas transmisoras. Cualquier visitante podrá apreciar en la zona, que la mayoría de las casas, por humildes que sean, tienen sobre su techo una antena de alta ganancia montada en un poste relativamente alto, que les permite ver directamente algún canal de televisión de Lima.

El presente trabajo busca encontrar las causas de este fenómeno. Conocidas las causas, debe ser posible predecir la performance de circuitos de comunicación usando frecuencias y distancias similares. Esto es, abrir posibilidades de usar frecuencias de VHF en las costas del Perú para distancias mayores a las que normalmente se espera. Las características de propagación anómala mencionada son un recurso natural que tiene el Perú y que puede y debe ser aprovechado.

Nuestro estudio permitirá también hacer un mejor uso de las frecuencias de radiodifusión, tanto de televisión como de radio FM. En la actualidad se están dando licencias para uso de la misma frecuencia utilizando criterios, que si bien son válidos para otros lugares, no se aplican a la costa del Perú. Al darse licencia de la misma frecuencia a distancias menores a las que permite la propagación anómala, se está produciendo interferencia de una estación con otra. Esto lo hemos

podido comprobar en las inmediaciones de Chincha y Pisco, donde estaciones FM locales son interferidas por estaciones de Lima con la misma frecuencia.

El enfoque que tiene este trabajo es la explicación física del fenómeno, cubriendo temas de meteorología y radiocomunicación. El conocimiento de los perfiles de altura de los diferentes parámetros meteorológicos, especialmente los de temperatura y humedad relativa, nos dan los datos necesarios para conocer el índice de refracción en el medio de propagación. La física de la propagación de ondas electromagnéticas en un medio con índice de propagación variable, nos permite estimar la intensidad de la señales a ser recibidas en los puntos de interés.

El Instituto Geofísico del Perú(IGP) tiene un programa paralelo de investigación con el cual se está documentando la intensidad de las ondas de varias frecuencias de FM y televisión transmitidas desde Lima y recibidas en Paracas. Este trabajo es independiente al presente trabajo teórico, pero nos permite hacer comparaciones de las intensidades recibidas con las que nosotros estimamos, usando diferentes mecanismos de propagación.

Creemos que nuestro estudio es el primero de esta clase que se hace en el Perú, pero sacaremos ventaja de estudios en otras zonas del mundo con condiciones similares, aunque, como veremos después, no tan propicias como las que se dan en el Perú.

La propagación anómala troposférica ha sido estudiada antes en otras regiones. Ante el descubrimiento de poder transmitir señales de altas frecuencias, a largas distancias por la Troposfera [Trevor y Carter en 1932], se empezaron las investigaciones en este tema. Los primeros estudios estuvieron relacionados con el desarrollo del radar, con fines de defensa, en Inglaterra [1]. Estudios similares al nuestro los encontramos en zonas que se ubican al lado este de los anticiclones, generalmente asociados con una inversión del perfil de temperatura en función de la altura. Este es el caso de las costas de California - EEUU. Tierra adentro, un caso similar de propagación de las señales de TV y radio en la banda VHF sucede en Illinois - EEUU, en la zona de los lagos [ver Bean, B. y Dutton, E. [1]].

Como veremos más adelante, la causa de esta propagación anómala la atribuimos a un efecto de reflexión parcial que sucede en la atmósfera. Esto sucede cuando una señal de radio incide en un ángulo rasante con la horizontal sobre

una capa superior, en la cual se produce un salto en el índice de refracción.

El fenómeno de refracción es también importante. Ayuda a que el ángulo de incidencia sobre una “superficie” donde puede ocurrir un fenómeno de reflexión parcial sea menor. Es más, para cada índice de refracción menor que el del medio de propagación original, existe un ángulo crítico de incidencia para el cual la reflexión es total (ver ley de Snell, 2.3). Hemos también investigado esta posibilidad. En todo caso, está claro que las propiedades de refracción del aire en la troposfera, esto es, su índice de refracción, son muy importantes.

Dada la importancia de las propiedades de refracción del índice de refracción de la troposfera, calcularemos y analizaremos los perfiles de  $n$  vs altura,  $n(z)$ . Para ello debemos conocer los perfiles de temperatura y humedad relativa para cada valor de presión de la atmósfera, porque  $n$  está definida por estos parámetros.

Con ayuda de los perfiles de temperatura y humedad relativa, llevaremos a cabo el estudio de la inversión de temperatura que sucede en la costa peruana, guiándonos, por lo tanto, a un estudio de la meteorología de la costa. Concluiremos que la inversión de temperatura, y más importante aún, el salto brusco de la humedad relativa, producen un gran gradiente en el índice de refracción  $n$  en la costa peruana a diferencia del comportamiento normal en otras zonas donde éste disminuye lentamente con la altura.

La refracción estará definida gracias al trabajo de Debye [2], quien estudió la polarización de las moléculas polares, como el vapor de agua, y las moléculas no polares como son las del oxígeno ( $O_2$ ) y nitrógeno ( $N_2$ ) cuando están dentro de un campo electromagnético externo. El fenómeno de reflexión en capas en la atmósfera fue propuesto inicialmente por J. Epstein (1933) [3], luego seguido por Friis, H. T. y Craford, A. B. (1957) [4], y después por: Northover, F. H. (1956) [5], B. R. Bean y E. J. Dutton [1]; y Du Castel, F. [6], entre otros.

Como ya hemos mencionado, una propagación anómala de ondas de radio puede ocurrir por el efecto de la refracción y reflexión total. En este caso, las ondas quedan atrapadas en una pseudo guía de onda que se forma por las paredes o capas, donde se produce la reflexión total de los rayos, y la superficie terrestre. Estas capas en la atmósfera se supone que no son conductoras. Debido a que el gradiente de  $n$  es suficiente para poder refractar los rayos de la señal hasta llegar

a un punto donde se puede producir la reflexión total para guiar los rayos hacia abajo, luego se refracta y refleja en la superficie terrestre, para después formar una pseudo guía de onda. Estos temas que afectan o ayudan a la propagación anómala serán explicados más adelante, en el capítulo 2.

En el capítulo 3, abarcaremos el estudio de las condiciones meteorológicas y su climatología de la costa peruana. Dichas condiciones son base para saber el comportamiento de nuestra atmósfera durante todo el año, incluyendo el cómo y cuándo se produce la inversión de temperatura. Además, la humedad relativa también será estudiada, con datos tomados principalmente con radiosondas. La humedad relativa y la temperatura son parámetros que nos dan el valor del índice de refracción de la atmósfera, el cual nos ayuda a deducir cuál es el factor que influye en la propagación anómala.

En el capítulo 4, estudiaremos los perfiles idealizados para la temperatura, humedad relativa y  $n$ ; estudiando el coeficiente de reflexión de Fresnel para la capa de inversión elevada, con la propuesta de tener un perfil de  $n$  igual a la Función Error. Dicha función nos da una fina continuidad y nos permite manejar el gradiente de  $n$  a cualquier escala. También calcularemos algunos términos técnicos, como la potencia que sería recibida; el ruido que puede afectar a la señal y el valor de la relación señal a ruido(SN). SN es una forma de ver qué tan efectiva es la señal recibida.

Este estudio lo completamos con datos tomados con radiosondas en el Radio Observatorio de Jicamarca (setiembre-1998) y en el aeropuerto Jorge Chavez del Callao (promedios de registros de 20 años desde 1968). Se puede notar la inversión elevada de la temperatura y humedad relativa, y su variabilidad en intensidad y escala durante el año. Los datos de Jicamarca fueron registrados en los finales del invierno de 1998, después de la etapa de un Niño fuerte.

Finalmente, en el capítulo 5, presentamos las conclusiones de nuestro trabajo de estudio de la propagación anómala de las ondas de radio en la banda VHF para televisión y radio. La reflexión parcial que provoca este fenómeno será una de nuestras principales conclusiones.

## Capítulo 2

# Propagación de ondas electromagnéticas en la Troposfera

### 2.1. Propagación en un medio no homogéneo y estratificado

La propagación electromagnética de campos eléctricos  $\mathbf{E}$  y magnéticos  $\mathbf{B}$ , está dada por las Leyes de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{J}, \quad (2.4)$$

donde,  $\mathbf{D}$  es el desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{H}$  es la intensidad magnética,  $\rho$  es la densidad de cargas y  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente.

Para un medio homogéneo e isotrópico, la permitividad eléctrica  $\epsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$  son constantes, además el medio está libre de cargas y corrientes  $\rho = 0$  y  $J = 0$ , y  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Suponiendo que la solución son ondas planas armónicas para los campos eléctricos y magnéticos, obtenemos la ecuación escalar de propagación de las ondas de Helmholtz, que es:

$$\nabla^2 \Pi + k_o^2 n^2 \Pi = 0, \quad (2.5)$$

donde,  $k_o$ , es el número de ondas para el espacio libre y  $n$  es el índice de refracción del medio.  $\Pi$  es la función escalar de Hertz. Esta función facilita el cálculo de los campos vectoriales, porque ambos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  tienen la misma forma de ecuación de



onda, pudiéndoseles hallar por medio del vector de Hertz. Este vector puede tener una sola componente en la dirección donde se anula alguna componente de los campos  $\mathbf{E}$  ó  $\mathbf{B}$ , que es  $\Pi$ , ( como se puede ver, por ejemplo, en el Jackson [7] o Born [8]).

El índice de refracción del medio está dada por:

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \quad (2.6)$$

donde  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica ó permitividad eléctrica relativa, que es dada por la relación entre la permitividad del medio  $\epsilon$  y la permitividad del espacio libre  $\epsilon_o$ ;  $\mu_r$  es la permeabilidad magnética relativa dado por la relación entre la permeabilidad del medio  $\mu$  y la permeabilidad del espacio libre  $\mu_o$ , y  $n$  puede ser complejo cuando el medio es absorbente ó conductor.

Para un medio no homogéneo, estratificado e isotrópico, como la troposfera, con densidad de carga y corriente nulas, se tiene que la permitividad eléctrica  $\epsilon$  varía con la altura  $z$  y la permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$  es igual a la unidad. La ecuación para el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y campo magnético  $\mathbf{H}$  en este medio es dado por:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) + k_o^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \nabla \times \mathbf{H} + k_o^2 \epsilon_r \mathbf{H} = 0 \quad (2.8)$$

donde las soluciones que se han usado varían en el tiempo con el factor  $e^{-i\omega t}$ , siendo  $\omega$  la frecuencia. Si la variación de  $\epsilon$  y del medio es suave, es decir, la variación del índice de refracción  $n$  es pequeña dentro de una región dada, esta variación se puede ignorar y obtener la misma ecuación para un medio homogéneo.

Cuando  $\epsilon$  varía en la dirección  $z$ , planteamos que la propagación es en el plano  $xz$ , es decir, que la solución no depende de  $y$ , y cualquier derivada respecto a  $y$  es cero. Por lo tanto, obtenemos la ecuación de propagación si el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia (que contiene al vector de propagación de la onda,  $\mathbf{k}_i$  de incidencia y a la normal de la frontera  $\hat{\mathbf{n}}$ ), expresada como:

$$(\nabla_{xz}^2 + k^2(z))E_y = 0, \quad (2.9)$$

donde,  $\nabla_{xz}$  es el laplaciano sólo considerando las segundas derivadas respecto a  $x$  y  $z$ ;  $k^2(z) = \epsilon_r(z)k_o^2 = n^2(z)k_o^2$ .

Las componentes de  $\mathbf{H}$  se pueden obtener de las ecuaciones de Maxwell. Ahora, si  $\mathbf{E}$  es paralelo al plano de incidencia, se toma  $\mathbf{H}$  con una sola componente en  $y$ , y reemplazando  $H_y(x, z) = k(z)V(x, z)$  obtenemos una ecuación parecida a la de  $E_y$  para  $V$ , pero con el segundo término diferente. Cuando el gradiente de  $\epsilon$  es pequeño, y  $k$  es suficientemente grande, se consigue la misma ecuación 2.9, pero para  $V$ . La expresión para  $E_y$  se puede representar por:

$$E_y(x, z) = \psi(z) \exp(ik(z_o) \text{sen}\theta(z_o)x), \quad (2.10)$$

con  $\theta(z_o)$  como ángulo de incidencia respecto de la normal de la frontera del medio en  $z_o$ , tal que por la ley de Snell se cumple  $k(z) \text{sen}\theta(z) = k(z_o) \text{sen}\theta(z_o)$ . De esta forma podemos obtener la ecuación de onda:

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k_o^2 n^2(z) \cos^2\theta(z) \right] \psi = 0, \quad (2.11)$$

y encontrar una similar cuando se halla  $H_y$  con  $\mathbf{E}$  paralelo al plano  $xz$ , así, el problema es resolver la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + g^2(z)\psi = 0. \quad (2.12)$$

Como el índice de refracción varía con la altura  $z$ , esto nos llevará al estudio de perfiles de  $n(z)$ , para ver cómo influyen en la propagación anómala de ondas de radio en la troposfera, al resolver las últimas ecuaciones. Además por un estudio del método del trazado de rayos que nos ayudará encontrar algunos parámetros como el rango del camino de propagación.

## 2.2. Índice de refracción para ondas de radio

La propagación de ondas cortas en la troposfera, a partir de la banda VHF, es afectada por el medio que hace que se refracten. El índice de refracción  $n$  para las ondas de radio disminuye con la altura. Por lo general, se da un promedio de  $n$  para la atmósfera cerca a la superficie igual a 1,0003, pero en realidad éste varía. Los cambios son pequeños pero estos afectan a la propagación de las ondas de radio. La Polarización (P) de un líquido polar bajo la influencia de un campo de onda de radio de alta frecuencia, [Debye [2]], está dado por:

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi N_a}{3} \left[ \alpha_o + \frac{m^2}{3kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \right] \quad (2.13)$$

Donde,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica,  $M$  el peso molecular,  $\rho$  la densidad del líquido,  $N_a$  el Número de Avogrado,  $\alpha_o$  es la polarizabilidad promedio de las moléculas en el líquido, sin interacción de las moléculas,  $m$  el momento dipolar permanente,  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta,  $\tau$  es el tiempo de relajación para que las moléculas vuelvan de la dirección inducida por el campo externo a una distribución al azar (cuando deja de actuar este campo externo), y  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia del campo externo.

De  $P$  se puede despejar  $\epsilon_r$  para las moléculas polares como también para las moléculas no polares ( $m = 0$ ) y para altas frecuencias  $\omega\tau \ll 1$ . Suponiendo  $\mu_r$  muy cercano a la unidad, tenemos  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , y por la Ley de Dalton sumamos los efectos de las moléculas polares y no polares y obtenemos el índice de refracción  $n$ , [ver apéndice A]. Es más práctico usar  $N$  definido como  $N = (n - 1)10^6$ , el cual está dado por :

$$N = (n - 1)10^6 = 77,6 \frac{P}{T} + 3,73 \times 10^5 \frac{e}{T^2}, \quad (2.14)$$

donde,  $N$  es la refractividad, usado por comodidad para poder ver más claramente la variación de  $n$ , dada en unidades de  $N$  comúnmente;  $T$  es la temperatura de la atmósfera en  $^{\circ}\text{K}$ ;  $P$  es la presión del aire en mb;  $e$  es la presión parcial del vapor de agua en mb, que puede calcularse con la humedad relativa por:

$$e = e_s * RH/100, \quad (2.15)$$

RH es la humedad relativa del aire y  $e_s$  es la presión de saturación del vapor de agua, igual a:

$$e_s = 6,105e^x, \quad (2.16)$$

donde

$$x = 25,22 \frac{T - 273,2}{T} - 5,31 \ln\left(\frac{T}{273,2}\right), \quad (2.17)$$

ésta es una expresión aproximada de  $e_s$ . Alternativamente, también  $e_s$  se puede obtener de tablas, como las “*Smithsonian Meteorological Tables*”, vol. 36 de la *Smithsonian Miscellaneous Collections* o por la gráfica 2.2, que presentamos aquí.

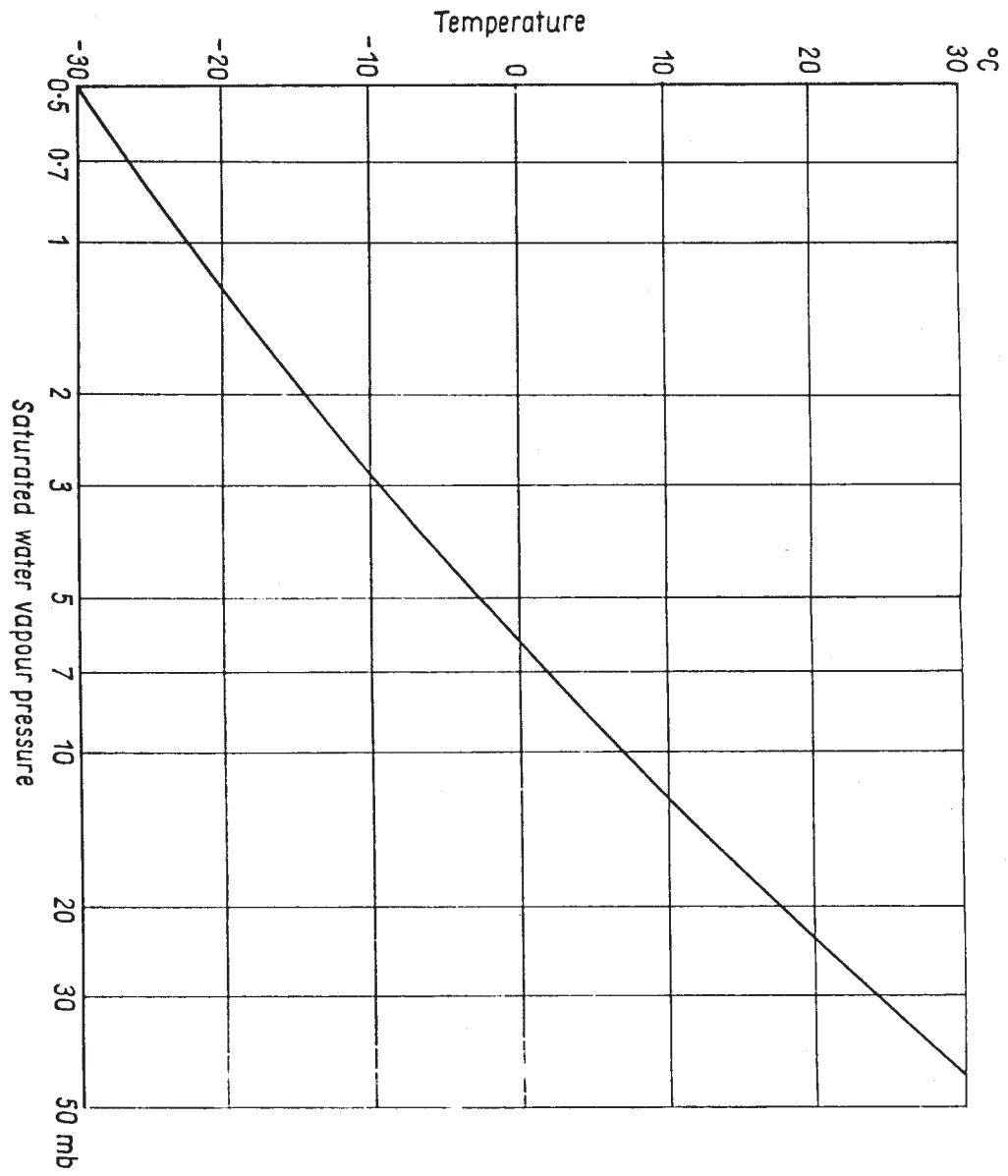


Figura 2.1: Presión de saturación del vapor de agua en función de la temperatura

En la ecuación 2.14 para la refractividad,  $N$ , el primer término es el llamado término seco porque no considera la parte húmeda del aire, y proviene de la contribución de la polarización de las moléculas no polares, y como se puede apreciar, depende de la presión y la temperatura. Su gradiente dependerá principalmente de la variación de la temperatura, porque si no es mucha, la gradiente negativa de la presión dominará, con lo cual el término seco decrecerá muy poco.

El segundo término es llamado el término húmedo, porque depende de la presión parcial del vapor de agua. Proviene de considerar a las moléculas polares como el agua, y tiene un comportamiento que depende de la variación de la temperatura y la presión del vapor de agua  $e$ . Cuando hay una disminución brusca de la humedad y la temperatura aumenta, este término predomina, por lo tanto, el gradiente de  $N$  es más negativo. Así, de la tabla 4.2, si la temperatura sube de 11 °C a 21 °C y la humedad baja de 100 % a 15 % tenemos un  $\Delta N$  de -55,7. E.E.Gossard [9] verificó el caso en que la humedad disminuye abruptamente, y la temperatura aumenta, teniendo ambos una imagen y una alta correlación negativa, como lo podremos apreciar en el capítulo 4.

Para una atmósfera estándar,  $n$  disminuye con la altura con una gradiente de  $N$  de -57 N/km. Este comportamiento se puede aproximar con una función lineal o con una función exponencial, en la troposfera [Bean, B. y Dutton, E. [1]].

### 2.2.1. Método de Trazado de rayos (*Ray Tracing*)

Al igual que en óptica geométrica, podemos usar el método de trazados de rayos para representar la propagación de una onda plana. El trazado de un rayo está dado por la ecuación eikonal [Kerr, D. [10] y Tyras, G. [11]].

$$(\nabla\phi)^2 = n^2 \tag{2.18}$$

donde  $\phi$  es función de la posición, llamado el “camino óptico”. Esta ecuación se obtiene al expresar en forma general a los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en la forma de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{ik_o\phi(\mathbf{r})}$ ,  $\mathbf{A}$  es la función de la amplitud; usando las ecuaciones de Maxwell, y para valores grandes de  $k_0$ , con una aproximación de primer orden, se obtiene la ecuación eikonal. Así los rayos se propagan perpendiculares a las superficies de  $\phi = constante$ .

Para que el método sea válido se debe obedecer ciertas condiciones, como que el cambio fraccional de la separación de los rayos debe ser pequeño respecto de una longitud de onda, y el cambio de  $n$  debe ser pequeño dentro de una longitud de onda.

Por este motivo, este trazado de rayos es más válido para la óptica, sin embargo, también puede ser usado para obtener resultados aproximados para las ondas cortas de radio. Un rayo tendrá un radio de curvatura igual a

$$R = \frac{-1}{n} \frac{dn}{dz} \cos\theta' \approx -\frac{dn}{dz}, \quad (2.19)$$

donde  $z$  es la altura y  $\theta'$  el ángulo de elevación del rayo.

Es común usar un truco matemático en el que en lugar de tener rayos curvos con respecto a la superficie terrestre, se usa una superficie terrestre de un radio mayor referente a la cual los rayos son rectos. Para simular que un rayo vaya en línea recta suponemos tener una Tierra con un radio efectivo igual a  $k_r a$ , donde  $a$  es el radio de la Tierra de 6370 km. Este radio efectivo es deducido de la suma de curvaturas del rayo en una atmósfera normal y de la Tierra, la suma debe ser igual sólo a la curvatura terrestre ideal con curvatura de los rayos igual a cero, para conservar la curvatura del rayo respecto de la curvatura de la Tierra. De la relación

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \cos\theta' = \frac{1}{k_r a} + 0. \quad (2.20)$$

obtenemos el factor  $k_r$  que determina el radio efectivo

$$k_r = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} \frac{dn}{dz} \cos\theta'}. \quad (2.21)$$

Para una atmósfera estándar tenemos el gradiente de  $n$  igual a  $-1/4a$ , así obtenemos el valor de  $k_r = 4/3$  [Bean [1]]. De esta forma, si agregamos al índice  $N$  la cantidad de la gradiente de  $n$  para  $k_r = 4/3$ , obtenemos el índice modificado  $B_n$

$$B_n = N + \frac{h}{a} 10^6, \quad (2.22)$$

donde  $h$  es la altura en metros.

Un segundo truco consiste en suponer una Tierra plana en la que el rayo se curva bajo condiciones normales de la gradiente de  $n$ . Para una propagación

simulando la tierra plana,  $k_r = \infty$ , obtenemos la gradiente de  $n$  igual a  $-1/a$ .  $n$  se transformará en:

$$M = N + 0,157z, \quad (2.23)$$

donde  $z$  está en metros, y  $M$  es el índice modificado. Este índice es utilizado cuando se cumple que las distancias entre transmisor y receptor son hasta la mitad del radio de la tierra y las alturas  $h$  de las antenas cumplen:

$$(kh)\left(\frac{h}{a}\right)^{3/2} < 1, \quad (2.24)$$

dando un error de 2 % en el campo eléctrico para cualquier frecuencia [D. Kerr.[10]].

También tenemos el Potencial refractivo  $\phi_n$  expresando  $N$  respecto a un nivel de presión, así, la presión, la temperatura y la presión del vapor de agua, serán expresados respecto de un nivel de presión. Cuando hay turbulencia en la atmósfera,  $\phi_n$  es constante ya que la turbulencia provoca que el aire sea bien mezclado.

### 2.3. Ley de Snell para la Tierra esférica estratificada

La ley de Snell para la refracción de un rayo entre dos interfases con diferentes índices de refracción, está dada por :

$$n_0 \cos(\theta) = n_1 \cos(\phi) \quad (2.25)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia con respecto a la horizontal, y  $\phi$  el ángulo de refracción con respecto a la horizontal. Nótese la diferencia con respecto a la ecuación normalmente usada en óptica, en que los ángulos se miden con respecto a la normal, y se toma el seno en lugar del coseno. Esto es por comodidad, puesto que se trabaja con ángulos pequeños,  $\theta$  y  $\phi$ , los cuales ayudan a hacer aproximaciones en los cálculos. La reflexión total se da cuando un rayo va de mayor índice de refracción a uno menor, y no hay ángulo de refracción. En este caso tenemos el ángulo crítico  $\theta_c$ , que cumple:

$$\cos(\theta_c) = \frac{n_1}{n_0}. \quad (2.26)$$

Para la atmósfera terrestre, tomando en cuenta la forma esférica de la Tierra, podemos escribir la Ley de Snell en coordenadas polares como:

$$n_0 \cos(\theta) r_0 = n_1 \cos(\phi) r_1 \quad (2.27)$$

donde  $r_0$  y  $r_1$  son la posición radial de los puntos de refracción, desde el centro de la Tierra, y  $n_0$ ,  $n_1$  los índices de refracción en dichos puntos. Como en el caso anterior, podemos hallar el ángulo crítico  $\theta_c$ , pero ahora dependerá también de las posiciones.

## 2.4. Propagación anómala

Las señales en una atmósfera estándar con refracción normal llegarán hasta un rango horizonte de unos 60 km a 80 km, pero si hay anomalías en la troposfera, pueden extender su alcance hasta miles de kilómetros. Los mecanismos posibles para hacer propagar las ondas de radio más allá de su horizonte, los describiremos como :

- Refracción y reflexión total
- Reflexión parcial
- Dispersión (scattering) troposférico

### 2.4.1. Refracción y reflexión total

Cuando hay un cambio significativo de la gradiente de  $N$  se puede hablar de que los rayos pueden ser suficientemente refractados para poder inclinarse hacia la horizontal y producir una reflexión total. Así tenemos, según los valores de la gradiente de  $N$ :

**Subrefracción:** Cuando la gradiente de  $N$  es mayor de  $-39$  N/km los rayos son refractados hacia arriba, sin poder llegar hasta la superficie.

**Superrefracción:** Cuando la gradiente de  $N$  es mayor a  $-157$  N/km y menor de  $-39$  N/km, logrando producir la reflexión total a una cierta altura, luego los rayos se dirigen hacia abajo.

**Atrapamiento:** Cuando los rayos se propagan atrapados en unos ductos que se forman en la atmósfera, y la gradiente de  $N$  es menor que  $-157$  N/km. Una



forma de ver esto es usando el índice modificado  $M$ , como se observa en la figura 2.2. Después de sufrir una reflexión total, los rayos se dirigen hacia abajo, luego se reflejan de nuevo para subir y reflejarse una vez más en la altura, donde se produce la reflexión total. Esto se repite, para generar un ducto que propaga la onda atrapada en ella, pudiendo propagarse grandes distancias. Es decir, estos ductos se generan dentro de la zona donde se invierte el valor de  $M$ , y la proyección del mínimo valor que alcanza, hacia una altura abajo, donde se encuentra con otro valor de  $M$ , si hubiese.

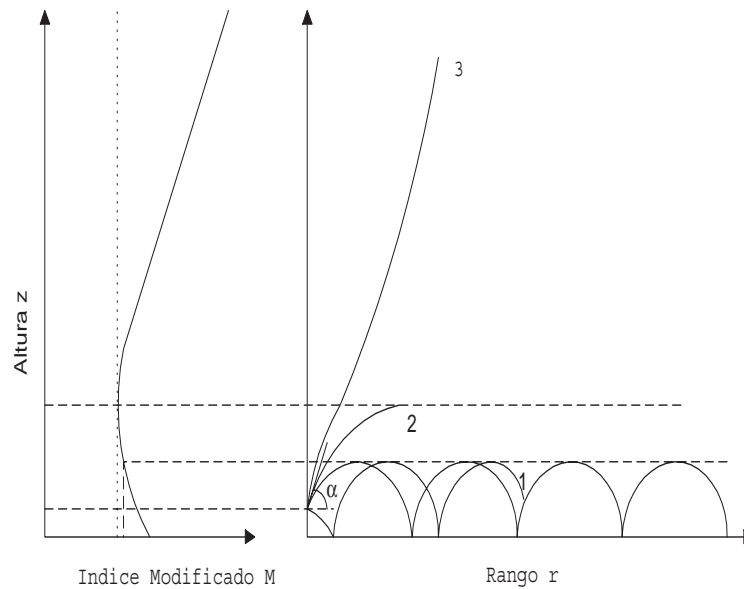


Figura 2.2: En la figura se muestra el caso de ductos en la superficie, caso 1 cuando es atrapado, caso 2 cuando hay la reflexión total y caso 3 cuando no logra reflejarse totalmente

### 2.4.2. Reflexión parcial

La reflexión parcial se da cuando hay una reflexión especular y transmisión de las ondas de radio después de incidir normalmente o con un ángulo rasante a la horizontal sobre una capa en la atmósfera estratificada con saltos en el índice de refracción casi discontinuos. Esto es, en la capa hay un gradiente del índice de refracción  $n$  más negativo que lo normal, que puede dar hasta la impresión de un salto de  $n$  casi discontinuo (esto lo observaremos en los primeros perfiles de  $n(z)$ )

en el capítulo 4).

Las capas de inversión térmica elevada son zonas donde se da la inversiones de temperatura, que es el aumento de ésta directamente proporcional a la altura, y se evidencia la disminución de la humedad relativa. También la forma del índice modificado  $M$  se invierte, de un gradiente positivo a un gradiente negativo, es decir, lo que estaba aumentando de repente decrece, formando una capa de inversión. Mas importante aun para la ocurrencia de reflexión parcial es que los cambios en  $n$  y  $M$  en la capa de inversión térmica sean grandes y bruscos.

La reflexión parcial se da con fuerza en la banda VHF, y no con las microondas, por no ser suficientemente brusca la discontinuidad del índice de refracción. Tampoco se da para las señales de ondas largas, ya que el espesor de la discontinuidad es pequeño en comparación a la longitud de onda de la señal.

Hay reflexión parcial también en capas delgadas, llamadas laminillas o *feuilles*, que son más persistentes y muy reflejantes, como proponen, Du Castel, F., Misme, P., Voge, J. y Spizzichino, A. (Du Castel, F., pág. 153, [6]). También se puede asumir que además, hay reflexiones difusas por efectos de una superficie irregular, que se pueden ver como pequeñas superficies reflejando especularmente.

### 2.4.3. Scattering Troposférico

Cuando se presentan anomalías en la atmósfera como turbulencias, éstas pueden provocar la variación del índice de refracción en el tiempo y espacio, logrando dispersar desde estas zonas las señales, las cuales cambian de fase y amplitud (centelleo), o bien se absorbe parte de su energía y se dispersa en varias direcciones. Las señales dispersadas pueden llegar a unos miles de kilometros más allá de su rango normal. Esta dispersión es explicada por que hay vortices de viento (eddies), de diferentes tamaños. Según el tamaño, estos eddies están en el rango inercial para los de gran tamaño y en el rango dispersivo para los de tamaño pequeño. Dispersivo, porque disipan energía por fricción. Los eddies son producidos por inestabilidades del fluido en movimiento, como por ejemplo, los cortes en la velocidad de los vientos o un gradiente vertical positiva en la temperatura potencial. Los eddies producen una mezcla de dos masas de aire con diferentes características, que provoca las variaciones de  $n$  en el medio [ Du

Castel, F.[6], M.P.M. Hall[12]].

## 2.5. Ductos

Los ductos son formados con el repentino cambio del gradiente de  $n$ , lo que provoca la reflexión total de los rayos de radio y los dirige hacia abajo. Esto, dependiendo del ángulo de salida desde el transmisor. Cuando se obtiene la reflexión total se le llama ángulo crítico, que está dado por:

$$\alpha_c = 10^{-3}[2(M_T - M_{min})]^{1/2} \quad (2.28)$$

donde  $\alpha_c$  está dado en mrad,  $M_T$  es el índice modificado en el transmisor y  $M_{min}$  es el mínimo valor de  $M$  en su inversión. Así tenemos los ductos de base en la superficie, cuando cerca a la superficie se produce una inversión de temperatura, y se logra un salto de  $n$  mayor a lo normal. Como se ve en la fig. 2.2, se pueden atrapar las señales para todos los ángulos  $\alpha$  menores que el ángulo crítico, provocando la reflexión total en el tope de la inversión de  $M$  ó antes.

Si la base de los ductos están en la superficie, se les llama “Ductos de base en la superficie”, que se pueden dar por lo general en las noches, cuando la tierra se enfría por radiación más rápidamente que el aire que la rodea, dándose una inversión de temperatura cerca de la superficie.

Si la zona donde se produce el mayor gradiente de  $n$  es arriba de la superficie, se les llaman “Ductos Elevados”, los cuales pueden hacer propagar la onda a miles de kilómetros.

También tenemos los “Ductos de Evaporación”, un modelo que explica cómo sobre la superficie de los mares se pueden formar ductos de menos de 30 m, por el mayor contenido de humedad cerca a esta superficie, por efecto de la evaporación de sus aguas.

Estos ductos transmiten las señales mayores que 500 Mhz con mayor intensidad, siendo débil la transmisión para las frecuencias entre 30 Mhz y 500 Mhz. [ Hall,M. [12], Du Castel, F. [6], Bean, B. y Dutton, E. [1], Kerr, D. [10]].

## 2.6. Otros mecanismos que afectan la propagación

Para las señales de frecuencias mayores que 3000 MHz, la longitud de onda puede ser menor que el tamaño de las partículas atmosféricas y pudiendo ser dispersadas o absorbidas. Gotas de agua en lluvias o neblinas pueden absorber una parte de la radiación electromagnética y atenuar la señal, haciendo que no llegue al receptor. En la dispersión se aplica la teoría de Rayleigh y Mie para partículas con tamaño menor o mayor a una longitud de onda, respectivamente, que dispersan la señal, como sucede con los rayos del sol, para dar el color azul del cielo. También para ciertos casos las señales de VHF pueden ser reflejadas por las capas E de la ionosfera, provocando la propagación a miles de kilómetros [Hall, M.P. [12], Du Castel [6]] y en regiones ecuatoriales como lo muestran R. Cohen y K. Bowles en su trabajo [Bowles y Cohen [13]].

## 2.7. Métodos para resolver la ecuación de propagación de ondas

Resolviendo la ec. 2.12 con condiciones iniciales, para un perfil de  $n$  simple de variación lineal, se obtiene su solución con las funciones de Airy. Para un perfil de  $n$  más complicado, se resolverá con varios métodos y por análisis numérico (Kerr, D. 1951 pág. 87-95 [10], K. G. Budden 1961 pág. 207 [14], Tyras G. 1969 pág. 70 [11]).

En los últimos años se ha desarrollado el algoritmo de la ecuación parabólica PWE, que resulta de la ecuación 2.12, con aproximaciones para llevarla a una forma parabólica. Entre estas aproximaciones, la variación de  $\epsilon$  es casi nula en la dirección horizontal  $x$ . Así, se obtienen imágenes simuladas de la propagación en la troposfera, dando información adicional a la que obtendríamos si usamos el Método de Trazado de Rayos (*Ray Tracing*).

El método de trazar los rayos de la señal (*Ray Tracing*), sólo abarcaría lo que esté dentro de la física geométrica, y sólo lo que está en la zona de visibilidad de las antenas, es decir, dentro del rango de alcance, cumpliendo las condiciones de tener un cambio de separación de los rayos menor que una longitud de onda, lo

que es mejor para altas frecuencias. Además  $n$  no debe cambiar apreciablemente en una longitud de onda.

También tenemos el método de la Teoría de Modos, el cual da modos de propagación de las ondas en la troposfera, incluyendo el fenómeno de interferencia y difracción para la zona más allá del horizonte. Esta teoría es parecida a la teoría de modos para guías de ondas. Solo servirá para algunos casos, siendo no aplicable para un perfil de  $n$  no homogéneo y también para los ductos elevados, pero aceptable para los ductos de base en la superficie.

Antes de resolver esta ecuación por métodos matemáticos rigurosos, vamos a tratar nuestro problema desde un punto de vista cualitativo, estudiando con el método de trazado de rayos, cómo es afectada la propagación con la variación de  $n$ .

### 2.7.1. Método WKB

Cuando la permitividad eléctrica es descrita por una función complicada o se desconoce esta función, una aproximación para resolver 2.12, es el método WKB (de las siglas de Wentzel, Kramers y Brillouin), el cual plantea la solución en la forma de:

$$\psi(z) = A(z)\exp(i\Theta(z)), \quad (2.29)$$

donde  $A(z)$  es la amplitud y  $\Theta(z)$  es la fase, sustituyendo en la ecuación 2.12 y descartando el término de la segunda derivada y para un medio que varía muy “lentamente”, tenemos la solución

$$\psi(z) = g(z)^{-1/2} \left[ C_1 \exp(i \int_0^z g(z) dz) + C_2 \exp(-i \int_0^z g(z) dz) \right], \quad (2.30)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes, y  $\psi(z)$  tiene significado físico si  $g$  es real, entonces  $g(z)^{-1/2}$  será proporcional al flujo de la potencia. El primer término de la ecuación de  $\psi(z)$  es una onda que se aleja y el otro término es una onda que se acerca al punto donde se evalúa  $\psi$ . Después esta ecuación nos ayudará a encontrar el coeficiente de reflexión cuando los rayos inciden sobre la frontera, donde el índice

de refracción cambia. Para la polarización horizontal, el  $E_y$  está dado por:

$$E_y = \frac{\exp(ik(z_0)\text{sen}\theta(z_0)x)}{[k(z)\text{cos}\theta(z)]^{-1/2}} [C_1 \exp(i \int_0^z k(z)\text{cos}\theta(z)dz) + C_2 \exp(-i \int_0^z k(z)\text{cos}\theta(z)dz)], \quad (2.31)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia sobre la frontera de dos medios o capas con diferente  $n$ . Este último método nos servirá para poder usar la aproximación óptica geométrica y hallar la relación de lo reflejado respecto a lo incidente, que es el coeficiente de reflexión cuando tenemos  $n(z)$ , que varía discontinuamente en una capa. Esto es cuando generalizamos el método tenemos las constantes igual a  $C_1(z) = A_0 + A_1\delta + A_2\delta^2 + \dots$  y  $C_2(z) = B_0 + B_1\delta + B_2\delta + \dots$ ,  $\delta$  un pequeño parametro (constante). Entonces:

$$\rho \approx \frac{B_1\delta}{A_0} \approx \frac{1}{2} \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} \exp[-2i \int_0^z qdz] dz, \quad (2.32)$$

con  $q = k(z)\text{cos}\theta(z)$ . Siendo el resultado igual al otro método de hallar el coeficiente de reflexión, que se verá en el capítulo 4.

# Capítulo 3

## Meteorología de la costa peruana

### 3.1. Introducción

Como las condiciones meteorológicas de la costa peruana afectan la propagación de las ondas cortas de radio, es necesario analizar cuáles son las características climatológicas de ésta, y el efecto que el anticiclón del Pacífico Sur tiene sobre estas. Este análisis estará basado en el comportamiento anual de los perfiles de temperatura y humedad relativa registradas en Lima y Callao durante un período de 20 años (1957-1978). Sin embargo, antes de presentar nuestro análisis, empezaremos dando algunas definiciones.

#### 3.1.1. Temperatura, Presión y Humedad Relativa

Para una atmósfera estándar, en la troposfera la temperatura varía normalmente en forma inversa a la altura, acercándose al valor del *Lapse Rate adiabático seco*, que es el gradiente de la temperatura con respecto a la altura en un sistema adiabático. La troposfera es la primera región de la atmósfera.

La presión disminuye en forma exponencial con relación a la altura, determinada al resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.1)$$

donde,  $z$  es la altura,  $\rho$  es la densidad de los gases y  $g$  la gravedad.

La concentración de vapor de agua se puede expresar con la humedad específica  $q$ , que es la razón de la densidad del vapor de agua y la densidad total de un volumen de la atmósfera; y el *mixing ratio*  $w$ , que es la razón de la densidad

del vapor de agua sobre la densidad del aire seco. Entonces  $q$  se puede expresar en función de  $w$  como:

$$q = \frac{w}{1 + w} \quad (3.2)$$

expresados en gramos por kilogramos, debido a la pequeña concentración de vapor de agua en la atmósfera.

La humedad relativa RH es expresada como la relación entre la densidad del vapor y la densidad del vapor saturado. Se dice que un vapor está saturado cuando el vapor está en equilibrio con la fase líquida (o sólida) a una cierta presión. Cuando se llega a este nivel de presión (la cual depende de la temperatura), llamada *presión de saturación del vapor*, si se agrega más vapor de agua, éste se transforma en líquido. Así, RH puede ser definida como:

$$RH = \frac{e}{e_s} \quad (3.3)$$

donde  $e$  es la presión del vapor de agua y  $e_s$  es la presión de saturación del vapor para una temperatura dada, suponiendo que el gas es perfecto para usar la ecuación de estado de los gases.

En esta forma, la humedad relativa tendrá un comportamiento que depende del tiempo y condiciones meteorológicas de la zona.

### **3.2. El Clima y La inversión de Temperatura en la Costa Peruana**

La costa peruana es de área desértica y un clima de poca precipitaciones, a pesar de ubicarse en una zona tropical. En su zona central se caracteriza también por una alta humedad, sobre todo en el invierno.

La explicación de estas características se debe a la presencia de una capa de inversión de la temperatura provocada por la existencia del anticiclón del Pacífico Sur y las aguas frías de su mar. Esto se manifiesta porque los vientos que vienen del sur, sureste ó sur-sureste a lo largo de la costa peruana, llamados alisios, desplazan las aguas calientes superficiales del mar hacia mar adentro. Esta dinámica produce el afloramiento de aguas frías de la profundidad. Estas



características producen un enfriamiento de los aires en contacto con su superficie. Además, como el anticiclón del Pacífico, producido por una zona de alta presión frente a la costa oeste de Sudamérica, está presente, la componente vertical de los vientos es hacia abajo (subducción), lo que provoca una compresión adiabática, y por ende, un aumento de la temperatura y disminución de la humedad relativa de los aires por encima de la capa límite en contacto con el mar. El resultado final es que en la costa peruana tenemos dos capas de aire de origen y características muy diferentes: una capa baja de aires fríos y húmedos por su contacto con el mar, y una alta, seca y caliente debido a la subducción. Las dos capas están separadas por una inversión de temperatura acompañada de un salto en la humedad relativa a una altura que varía entre los 100 m a 1500 msnm.

Con datos de una radiosonda tendremos una visión aproximada del perfil del índice de refracción, aunque sin la resolución suficiente para definir el espesor de esta capa de inversión, donde  $n$  tiene una discontinuidad, ya que podemos decir que ésta ocurre de 920 mb a 850 mb, con la base entre 920 y 900 mb; y con espesor entre 20 m y 100 m.

Esta condición del clima fue un caso extraño del porqué no llovía en esta parte del país, un misterio que intrigó a las personas, hasta que se llevó a cabo el desarrollo de la meteorología, que permitió encontrar esta inversión en el perfil de la temperatura. A medida que sube el aire casi saturado de humedad y se enfría, se produce la condensación y se forman nubes bajas, pero la inversión de temperatura los atrapa debajo de ella. Por lo tanto se forma un colchón de nubes, que impide la formación de lluvias, porque estas no llegan a la altura y temperatura necesarias para la precipitación de las partículas condensadas.

Este fenómeno sucede en las zonas que se ubican en la parte este de los anticiclones, como sucede en las costas chilenas y en el Sáhara (en el hemisferio sur), y en el hemisferio norte tenemos las costas de California, en especial en San Diego, donde se han hecho varios experimentos sobre la propagación de ondas cortas de radio.

Durante el invierno la costa peruana está cubierta por un colchón de nubes y no hay lluvias propiamente dichas, a lo más garúas con gotas muy livianas. En estas condiciones la inversión alcanza su máxima intensidad, siendo fuerte y

persistente. Este colchón de nubes varía a lo largo del litoral peruano, donde hay zonas donde se despeja, lo cual se da por ser zonas de baja presión, además, a unas 200 millas de la costa se despeja como una franja a lo largo de ésta, para luego el cielo cubrirse de nuevo con nubes. Hacia el este de Lima, yendo a la sierra central, uno puede observar este colchón de nubes y experimentar la inversión de temperatura al llegar a Chosica. A alturas comparables o superiores a Chosica se tiene un clima soleado en contraste con Lima, nublado y a veces con llovizna (E. Schweigger, 1946). Como referencia tenemos el registro de Prohaska (1973) [15], que establece que durante el período del 16 de Mayo al 30 de setiembre de 1967 se presencié la inversión en cada día, con un promedio de la base de inversión a 700 m y el tope a unos 1500 m. El incremento de temperatura fue de  $8^{\circ}\text{C}$  a través de la inversión. Durante este período se tuvo un gran número de días nublados. No conocemos otro lugar en el mundo en la que la inversión sea tan permanente y persistente.

Durante el invierno se tiene la temperatura promedio más baja para esta latitud, siendo la mínima de  $13^{\circ}\text{C}$  y la máxima de  $20^{\circ}\text{C}$ , con la humedad relativa muy alta y precipitación en forma de garúa. Por ejemplo, Prohaska (1973) [15] reportó que sólo 16 mm de precipitación cayeron sobre Lima por 877 horas de registro en 1973.

En verano, aunque la inversión de temperatura se debilita, hay neblinas que son producidas por la condensación del aire cálido pasando sobre las aguas frías. La inversión de temperatura es débil y fluctúa diariamente en altura e intensidad. La base de inversión en promedio ha bajado a 350 m, mientras que el tope de la inversión a unos 600 m. La temperatura de la superficie se encuentra en el rango de  $19^{\circ}\text{C}$  por la mañana, a  $28^{\circ}\text{C}$  por la tarde, con algunos días de humedad relativa alta. La baja nubosidad es escasa en verano, pero es regular en capas altas, y nubosidad en gran cantidad en capas medias. Las precipitaciones son raras, pero puede haber ligeras gotillas, que provienen de la amazonía, después de cruzar los Andes [15].

Como la transición de invierno a verano es gradual, la inversión de temperatura será gradualmente débil, y menos persistente de octubre a noviembre.

La costa peruana también es afectada por una variación interanual en la

estructura atmosférica, en respuesta a la variación de la temperatura de la superficie del mar. Cuando ocurre el fenómeno El Niño, las aguas del mar aumentan en unos dos grados o más de lo normal, la nubosidad es inferior a la normal, lo que aumenta el calor tierra adentro y produce fuertes brisas de mar. En un antiniño, cuando la temperatura del mar baja dos grados o más de lo normal; el gradiente de temperatura entre mar y tierra es mínimo, causado por la alta nubosidad, lo que produce débiles brisas de mar [15].

### **3.3. Comportamiento de la troposfera por estaciones en Lima según datos de 20 años (1957-1978)**

#### **3.3.1. Temperatura y humedad relativa**

A continuación recapitularemos el comportamiento promedio de los perfiles de temperatura y humedad relativa sobre una base de datos de 20 años tomados por radiosondas en el Callao y Lima. Estos datos fueron obtenidos de la tesis de Jay Anthony Albrecht [15], quién promedió mensualmente los datos para cada 5 mb de separación. El valor a cada 5 mb ( $\approx 50$  m) se obtiene por interpolación de las mediciones hechas cada 50 mb. Los resultados están graficados en forma de perfiles mensuales en la figura 3.1. Cabe aquí mencionar que la resolución empleada y el proceso de promediado mensual hace desaparecer los saltos casi discontinuos que se observan en un día dado (ver 4.2) pero nos son altamente útiles para describir y comparar el comportamiento estacional. Podemos apreciar, en la figura 3.1, que el promedio de la inversión de temperatura en verano es débil y baja, con su base de inversión en los 980 mb (280 m), y un espesor de 35 mb (300 m). Durante el otoño la inversión se va tornándose más fuerte y persistente. Durante el invierno esta inversión de temperatura es más pronunciada, con la base de inversión por los 935 mb (670 m), y un espesor de 85 mb (800 m). En primavera, ésta se debilita, y los fuertes vientos hacen una turbulencia entre la superficie y la base de inversión, lo que produce una capa bien mezclada, con un *lapse rate* cercano al adiabático. Según E. Schweigger [16], la capa de nubes están entre 430 m y 590 m de altura para las zonas de Lima y Pisco, respectivamente

para un promedio anual, con un espesor de unos 500 m, según datos medidos en los aeropuertos de Lima y Pisco para los años de 1949-1960.

Durante el verano la temperatura obtiene su máximo valor en la superficie, llegando a unos  $22^{\circ}\text{C}$ , siendo su mínimo  $9,5^{\circ}\text{C}$  a los 700 mb sobre la capa de inversión. El decaimiento de la inversión de la temperatura es causado por el decrecimiento de la “subsistencia” (bajada de masa de aire de la parte alta), y el aumento de calor en la superficie. La humedad relativa tiene su máximo valor arriba de los 900 mb (como a 700 mb), debido a la convección la humedad es desplazada hacia altos niveles. La humedad relativa promedio decrece de 80 % en los 1000 mb (100 m) a 50 % en los 700 mb (3000 m) de nivel de presión.

En otoño empieza a aparecer con fuerza la inversión de temperatura con el aumento de la “subsistencia”. En abril el promedio del espesor de la inversión de temperatura es de 45 mb, y sube en junio a 90 mb; la base y el tope aumentan conforme el invierno se acerca. La temperatura tiene un *lapse rate* cercano a una isoterma en abril, pasando a  $-0,05^{\circ}\text{K mb}^{-1}$  en junio. La base de la inversión de temperatura, que estaba en abril en 985 mb (240 m), pasa a 940 mb (630 m, sube en altitud) en junio, y el tope de 940 mb pasa a 845 mb (1530 m), la cual sube en altitud. La humedad relativa empieza a aumentar en la superficie, y como aumenta la inversión de temperatura por la bajada de masa de aire, la humedad relativa cae rápidamente a 30 % en el tope de la inversión de la temperatura.

En invierno la inversión es pronunciada y persistente, con la temperatura de su base en  $13^{\circ}\text{C}$  y a partir de ahí sube a  $18^{\circ}\text{C}$  en el tope de la inversión. En setiembre, cuando llega la primavera, es más pronunciada la inversión, y el incremento de la temperatura puede ser de  $6^{\circ}\text{C}$ . En invierno la inversión tiene su base cerca a los 935 mb (670 m) y su tope a 850 mb (1480 m). La humedad relativa aumenta en la capa marina hasta un 90 % o más. La capa marina es la región en contacto con la superficie del mar. Después la humedad relativa llega a la base de inversión en 90 %, para caer rápidamente a 25 %, manteniéndose por encima de la inversión. También puede ser nula cuando hay aire seco, en días en que es difícil medir su valor.

En primavera se incrementa la temperatura en la capa marina y disminuye arriba de la inversión de temperatura, conservando los promedios de invierno,

pero conforme avanza la primavera, se hace débil la inversión de temperatura. La humedad relativa empieza a bajar de valor en la capa marina y en la capa de inversión, con una disminución lenta y menos que en otoño, porque el proceso de cambio de invierno a verano es progresivamente lento.

Para un mejor estudio de los perfiles de humedad relativa y temperatura, se debe efectuar mediciones con mayor precisión, tomando datos por lo menos cada 10 m, o como hemos visto, cada 5 mb. Un promedio de perfiles por año o mes no es conveniente para nuestro propósito, porque al promediar, perdemos información de los detalles finos de la inversión que como veremos más adelante es mucho más abrupta en un momento dado.

### **3.3.2. Velocidad de los vientos**

En relación a los vientos frente a la costa peruana, en especial la de Lima, se observa que el promedio de la dirección de los vientos es de sur-sureste ó sur-este en la capa marina durante todo el año. Dentro de la capa de inversión la velocidad de los vientos se va debilitando en magnitud y varía en dirección. Para los meses cálidos de noviembre a abril en la parte alta de la capa de inversión, y arriba de ella, la dirección de los vientos es de norte-noroeste, esto se da por la presencia de una zona de alta presión sobre los Andes y por el incremento de los rayos solares y fuertes precipitaciones al este de la costa de Lima. Durante los meses de frío la dirección de los vientos es de sur-sureste en la parte superior de la inversión, debido a la presencia del Anticiclón del Pacífico Sur, y por haber una zona de baja presión causada por el enfriamiento de las tierras altas.

En cuanto a la magnitud de la velocidad de los vientos, se observa que tierra adentro aumenta con la altura, y cerca a la costa disminuye hasta el tope de la inversión, pero aumenta arriba de la inversión en ambos lugares. Dado que la velocidad es mayor en verano que en invierno, por el aumento del gradiente de temperatura entre la tierra y el mar, se evidencia brisas fuertes en la tarde de verano, mientras en invierno, por la abundante nubosidad, el viento es débil. En invierno los vientos por encima de la inversión son fuertes. En la costa, a los 1000 mb (100 m), la velocidad máxima puede ser de  $4 \text{ ms}^{-1}$  a  $5 \text{ ms}^{-1}$  en los meses de verano.

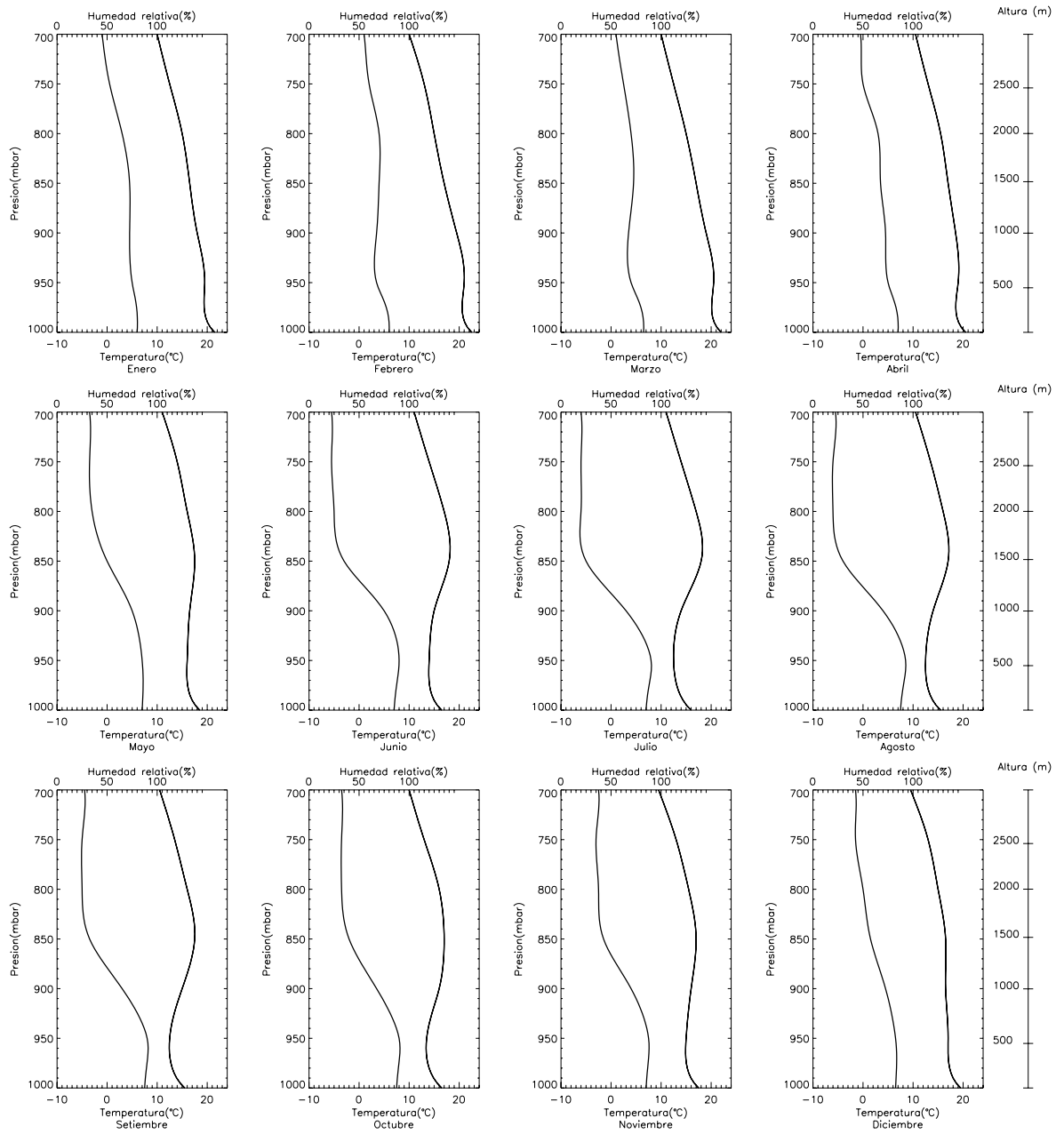


Figura 3.1: Perfiles mensuales de temperatura y humedad relativa de un promedio de 20 años (1957-1978), registrados en Lima - Perú. Tomado de Jay A. Albrecht - 1981 [15].

Se concluye en esta parte que la inversión de temperatura y la caída de la humedad relativa son efectos de la presencia del anticiclón del sur y el afloramiento de las aguas frías en el mar del Perú.

## Capítulo 4

# Propagación más allá del horizonte entre Lima y Paracas

### 4.1. Características

El fenómeno que motiva nuestro estudio es la recepción en la zona de Paracas y Pisco de señales de radio y TV procedentes de la ciudad de Lima, en especial desde el Morro Solar (lugar donde se ubican las antenas de las estaciones de TV y radio de Lima). La distancia de separación entre Lima y Paracas es de 200 km aproximadamente, según un trazado de línea recta en un mapa a escala. La zona de Paracas no cuenta con una repetidora y los pobladores sólo usan una antena normal, de tipo Yagui, para recibir las señales.

El Morro Solar está a unos 270 msnm y las antenas son de longitud de 30 m, con lo que el punto de transmisión se ubica a unos 300 msnm, usualmente las ondas cortas de radio son transmitidas con polarización circular. En nuestro estudio estimaremos la potencia que llega a la zona tomando el caso de la estación de Radio Programas del Perú (RPP), la cual transmite a la frecuencia de 89,7 Mhz y con una potencia de transmisión de alrededor de 30 kw, en la banda FM, considerando diferentes mecanismos de propagación, para luego escoger el mecanismo más probable.

### 4.2. Perfiles de temperatura y humedad relativa

Con los conocimientos del capítulo anterior, podemos plantear los perfiles de temperatura y humedad relativa, tomando como base la época en que la inversión



en la costa peruana es pronunciada y persistente. Para ello hemos utilizado los datos de temperatura y humedad relativa tomados en el aeropuerto Jorge Chavez en setiembre de 1989, para una hora y día específica (ver fig. 4.1).

Se observa que la temperatura normalmente disminuye con la altura  $z$  con un *lapse rate* de  $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  por cada 100 m, desde un valor en la superficie entre  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $16\text{ }^{\circ}\text{C}$  en invierno. La presión disminuye con altura en la forma normal y esperada desde su valor en la superficie de 1012 mb. Esta disminución de temperatura ocurre hasta los 1000 m, donde empieza la inversión. En la capa de inversión la temperatura aumenta de los  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Para comprobar que esta inversión de temperatura es extensa, incluimos también observaciones hechas a unos 30 km tierra adentro, en el Radio Observatorio de Jicamarca, Lima, Perú (muestra del día 17 de set. 1998, se da en la fig. 4.2). Las mediciones hechas en el Radio Observatorio de Jicamarca fueron hechas con una radiosonda con un sensor de temperatura de precisión y con una mejor resolución que la usada por CORPAC. Usualmente la capa de inversión tiene un espesor de 100 m. Después de la inversión, la temperatura vuelve a disminuir con la altura con el *lapse rate* promedio de  $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  por cada 100m.

La humedad relativa, que empieza con un 90 % en la superficie, se mantiene con el mismo valor hasta los 1000 m, y cae bruscamente a 30 % cuando llega al tope de la inversión, para luego seguir con ese valor en la parte superior. Los valores observados se han usado para construir un modelo de los perfiles de humedad y temperatura como los mostrados en la fig. 4.4 (Modelo Trilineal).

Con el trabajo de E. E. Gossard [9] se confirma más claramente la imagen negativa que tienen este tipo de perfiles de la temperatura y humedad relativa. Cuando la temperatura aumenta la humedad relativa disminuye con la imagen opuesta de la curva que presenta el aumento de temperatura. Esto se observó usando instrumentos de alta precisión y tiempo de respuesta muy cortos, para medir la temperatura y humedad. Aunque estos datos han sido obtenidos tierra adentro, en Denver-Colorado se puede apreciar la inversión de temperatura y caída abrupta de la humedad relativa en un espesor de unos 20 m, a una altura de 100 m. Esto se aprecia en la Fig. 4.3.

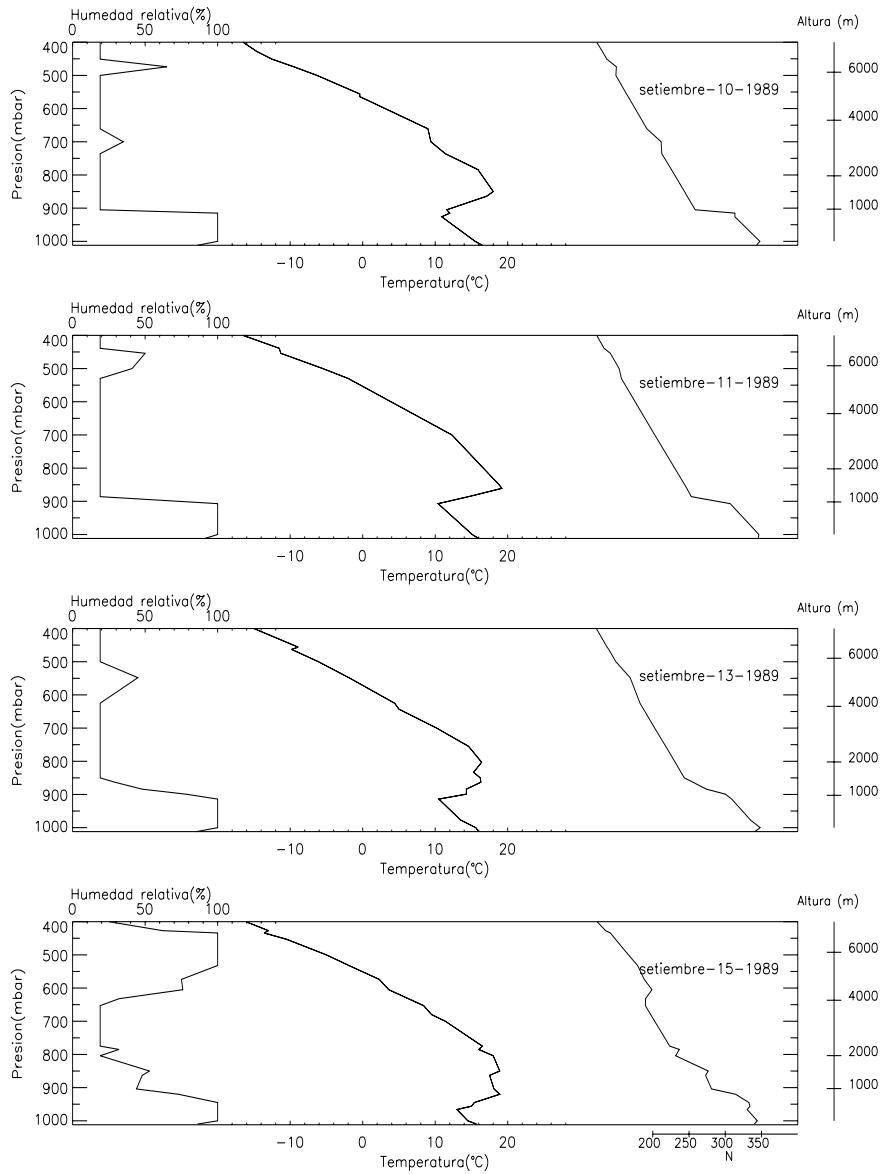


Figura 4.1: Perfiles de temperatura, humedad relativa y el índice de refractividad (N) en función de la presión, sobre Lima. Datos de CORPAC.

# JRO - 17-set98

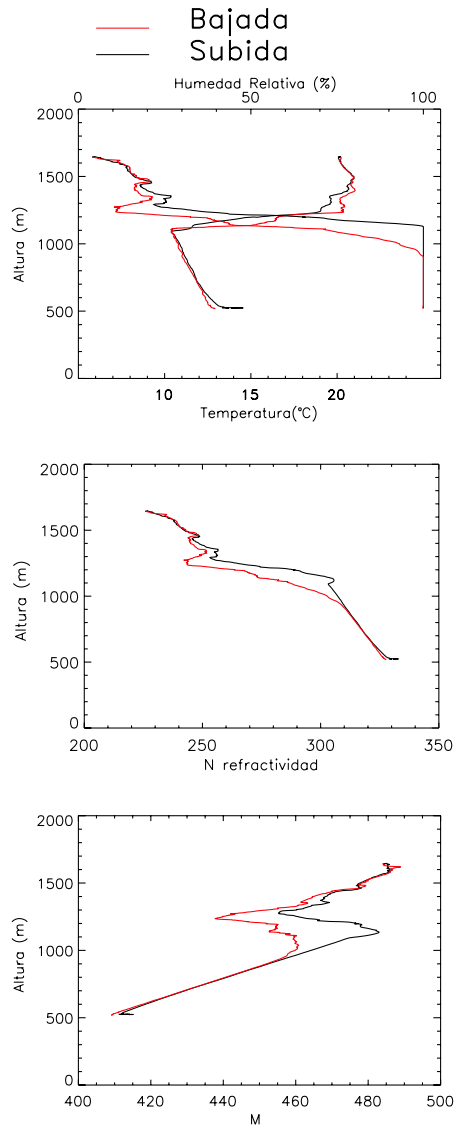


Figura 4.2: Perfiles en altura de temperatura, humedad relativa, índice de refracción por medio de la refractividad (N) y el índice Modificado (M), observado en el Radio Observatorio de Jicamarca (ROJ) el 17 set. de 1998

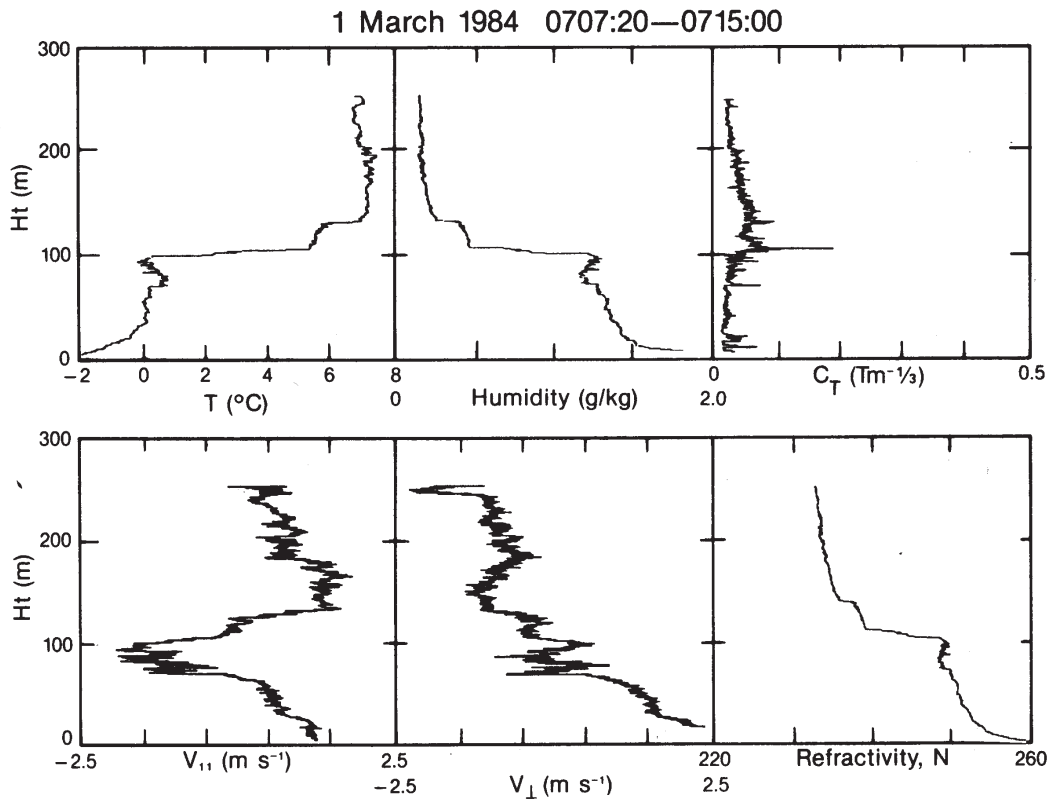


Figura 4.3: Dato de temperatura y humedad tomados con instrumentos de precisión colocados en un poste de 300 m, en el Boulder Atmospheric Observatory (BAO), Colorado - EEUU. Se nota la fuerte transición de unos  $5,5^{\circ}C$  y 14 N a través de la capa inferior. Nótese la excelente reproducción (negativa) del perfil de temperatura por la humedad, 1 de marzo de 1984 (tomado de Gossard, E. E. )

### 4.3. Perfil del índice de refracción $n$

Con el perfil de la temperatura y humedad relativa mostrados en las figuras 4.1 y 4.2 mostraremos también el índice de refracción obtenidos por medio de la ecuación 2.14, expresado en términos de la refractividad  $N$ . Apreciamos que primero  $N$  empieza a disminuir con la altura lentamente unas 4,4 unidades por cada 100 m, pero al llegar a los 1000 m, empieza a caer bruscamente, a razón de 37 unidades por cada 100 m, dando la impresión de un salto del índice  $n$ , para luego continuar disminuyendo lentamente, casi con el mismo gradiente inicial. De los valores de  $N$  podemos construir el perfil del índice modificado ( $M$ ) para tierra plana. Cuando hacemos cálculos de distancia y los ángulos de partida, incidencia, etc; usamos el método de tierra plana con el índice  $M$ . El perfil teórico de  $N$  y  $M$  lo presentamos en la fig.4.4, y los datos de los perfiles anteriores en la tabla 4.1.

### 4.4. Otros Perfiles

Si bien usamos el perfil del 17 de setiembre de 1998 para nuestro modelo, hemos efectuado 29 mediciones similares. Aunque no reproducimos aquí estas mediciones, podemos acotar algunos casos extremos donde:

- La humedad puede caer en la capa de inversión de 100 % o 99 % a valores tan bajos como 15 %.

- La temperatura baja de 16 °C a 11 °C en la capa límite superficial, para luego subir en la capa de inversión hasta los 22 °C. Esto es un salto de temperatura del orden de los 10 °C.

- La altura de la base suele estar alrededor de los 1000 m, como podemos ver en la figura 4.5 de los perfiles ideales antes mencionados, pudiendo disminuir a 900 m o subir hasta 1400 m.

### 4.5. Variación de $n$ según la variación de la temperatura y humedad relativa dentro de la capa de inversión

En la tabla 4.2 se presenta como varía  $n$ , por la disminución de RH y aumento de T dentro de una capa de inversión a unos 1000 m de altitud (900 mb)

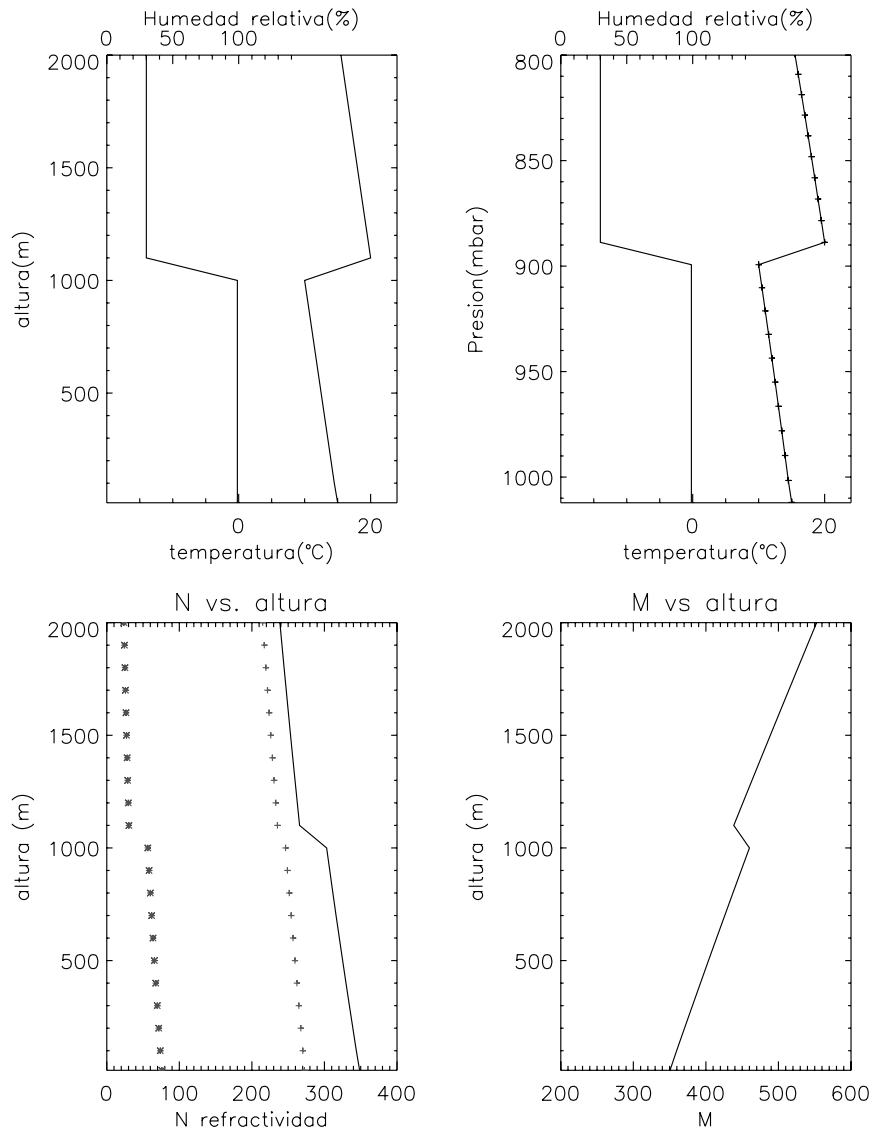


Figura 4.4: Arriba: Modelos linearizados de los perfiles de temperatura y humedad relativa, respecto a la altura (derecha) y respecto a la presión (izquierda). Abajo: perfil de la refractividad (N-izquierda) y el índice modificado M (derecha) usados en los cálculos de propagación. El término seco es representado con “+” y el término húmedo con “\*”.

P (mb)	T ( $^{\circ}C$ )	HR( %)	H(m)	N	M
1012,00	15,0	99,0	13,0	348,477	350,518
1001,61	14,5	99,0	100,0	343,986	359,686
989,774	14,0	99,0	200,0	339,150	370,550
978,060	13,5	99,0	300,0	334,389	381,489
966,465	13,0	99,0	400,0	329,701	392,501
954,987	12,5	99,0	500,0	325,085	403,585
943,625	12,0	99,0	600,0	320,540	414,740
932,379	11,5	99,0	700,0	316,065	425,965
921,248	11,0	99,0	800,0	311,659	437,259
910,231	10,5	99,0	900,0	307,320	448,620
899,326	10,0	99,0	1000,0	303,049	460,049
888,728	20,0	30,0	1100,0	265,743	438,443
878,424	19,5	30,0	1200,0	262,580	450,980
868,222	19,0	30,0	1300,0	259,456	463,556
858,122	18,5	30,0	1400,0	256,369	476,169
848,122	18,0	30,0	1500,0	253,320	488,820
838,221	17,5	30,0	1600,0	250,309	501,509
828,420	17,0	30,0	1700,0	247,334	514,234
818,716	16,5	30,0	1800,0	244,395	526,995
809,110	16,0	30,0	1900,0	241,491	539,791
799,600	15,5	30,0	2000,0	238,623	552,623

Cuadro 4.1: Datos de presión, temperatura, humedad relativa, altura, índice de refracción para onda de radio y el índice modificado M según un modelo teórico de la forma Trilineal dado en la figura 4.4.

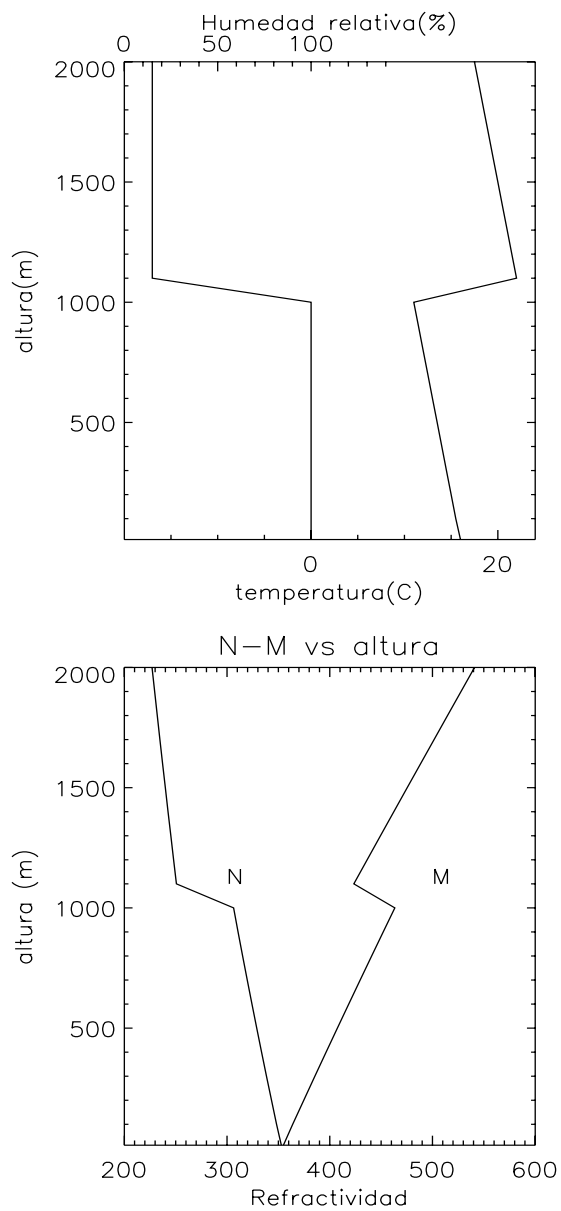


Figura 4.5: Otro perfil ideal. Arriba: Perfiles de temperatura y humedad relativa respecto a la altitud. Abajo: Perfil de la refractividad (N) y el índice modificado M de la atmósfera para ondas de radio.



y la temperatura superficial de 16 °C. El espesor es de 100 m. Donde  $\Delta N = (\Delta n - 1) \times 10^6$ . Vemos en la tabla 4.2 que cuando la disminución de la humedad relativa

variación T(°C)	variación RH (%)	$\Delta N$
11 a 16	100 a 15	-55,6
11 a 16	100 a 30	-43,4
11 a 16	100 a 50	-27,2
11 a 21	100 a 15	-55,7
11 a 21	100 a 30	-39,6

Cuadro 4.2: Variación de  $n$  en la capa de inversión según la variación de T y RH de la atmósfera.

es mayor, la disminución de  $n$  es mayor para un aumento de la temperatura. Si la disminución de la humedad relativa es muy alta, por ejemplo 85 %, un aumento de unos 5 °C o 10 °C en la temperatura se tiene un  $\Delta N$  de -56 N unidades.

#### 4.6. Perfil de $n$ con la forma de la función Error

Observando los datos de radiosondas, y con el modelo ideal para los perfiles de temperatura y humedad relativa, podemos plantear el perfil de  $n$  como una función continua, con un gradiente que puede variar suavemente y puede tomar la forma del perfil del índice de refracción ideal. Como lo señalan Woodman, R. y Chu, Y. en el apéndice de [17] una discontinuidad en el perfil de  $n$  y sus derivadas lleva consigo que la potencia recibida por la reflexión parcial sea sobreestimada. Es recomendable que cualquier modelo de  $n$  no tenga esquinas (discontinuidad en la primera derivada) en el salto abrupto, conformando así con su comportamiento real.

Una forma de modelar un salto de  $\Delta n$  en una distancia  $L$ , sin discontinuidades es mediante la Función Error. En función de estos parametros la función de  $n$  toma la forma:

$$n(z') = \frac{-\Delta n}{2} \cdot \text{erf}\left(\frac{(z' - z_0) \cdot \sqrt{\pi}}{L}\right) + n_0, \quad (4.1)$$

donde  $z'$ , es la altura,  $z_o$  la altura media y  $n_o$  el valor de  $n$  en el punto medio. La figura 4.6 muestra un ejemplo para un salto de  $\Delta n = -37$  y  $L = 100$  m, a una altura de  $z_o = 1050$  m.

Hemos escogido la función de error por ser una función conveniente desde el punto de vista matemático, y porque presenta mayor suavidad (amplitudes mínimas en el espectro de Fourier para longitudes de onda menores que  $L$ ) para un salto del índice de refracción,  $\Delta n$ , en un espacio característico  $L$ .

Otros perfiles para  $n$  dentro de la capa de inversión propuesto por varios autores, incluyen modelos lineales, en función de seno, tangente, etc. Los perfiles que tienen una discontinuidad o esquinas aumentan la potencia de reflexión o sobreestiman el coeficiente de reflexión. Por ejemplo, tenemos el perfil ideal lineal de gradiente de  $n$  constante en la capa de inversión. Estas funciones, si bien pueden ser convenientes desde el punto de vista matemático, presentan discontinuidades artificiales en sus derivadas que no se encuentra en la naturaleza. En el trabajo sobre la reflexión parcial para incidencia vertical de señales de radares en VHF en la alta troposfera de Woodman, R. y Chu, Y. [17] se hace referencia a este error de tomar un perfil con discontinuidades. Ellos recomiendan el uso de un perfil de  $n$  en forma de la función error lo que equivale a modelar la gradiente de  $n$  con respecto a la altura, en forma de una función gaussiana. lo cual se justifica por los procesos de difusión que tienden a tomar esta forma. La función error, erf, esta definida por:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (4.2)$$

## 4.7. Potencia recibida

De los mecanismos de propagación propuestos en el capítulo 2 hemos excluido la reflexión total porque no hay un ángulo crítico con las condiciones del perfil de  $n$  modelado. De la ecuación 2.27,  $n_o r_o / r_1$  debe ser mayor de  $n_1$  para la reflexión total. Pero tenemos  $N_o = 350$  y  $r_o = 6371,3$  km entonces  $n_1$  debe ser mayor de 1.000240, lo que no se halla en el perfil de  $n$  dentro de los 1100 m de altitud. A continuación definiremos la potencia recibida suponiendo un proceso de reflexión parcial con un coeficiente de reflexión de Fresnel dado por los perfiles

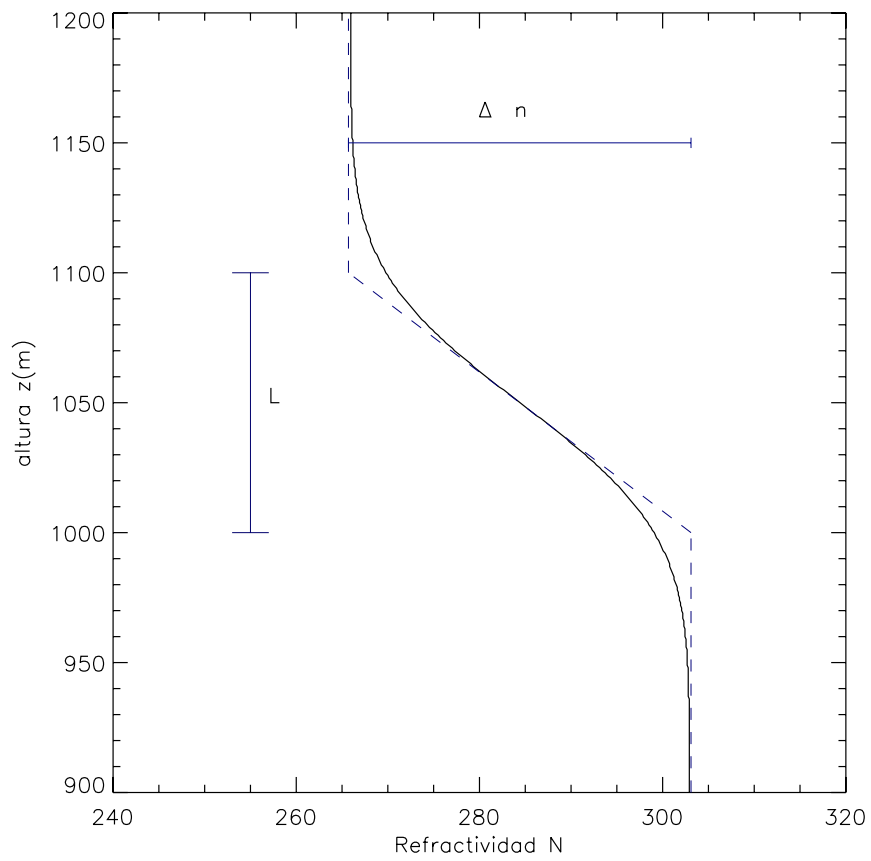


Figura 4.6: Perfil de la refractividad ( $N$ ) partiendo de una función error erf en la capa de inversión

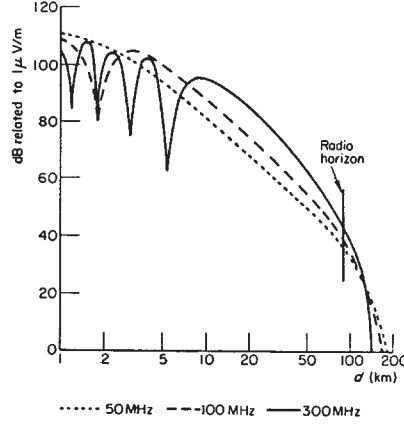


Figura 4.7: Intensidad del campo eléctrico en dB para tres frecuencias VHF, versus la distancia de recepción para una antena transmitiendo a 1kw en polarización horizontal. Tomado de Picquenard A. [18].

de  $n(z)$  de la forma de la ecuación 4.1. En la figura 4.7, observamos el campo eléctrico en función de la distancia de recepción, para frecuencias alrededor de 100 Mhz para una propagación sin reflexión parcial. Si la superficie de reflexión es mucho mayor que la primera zona de Fresnel, la potencia recibida es igual a:

$$P_r = P_{rf} \cdot \rho^2 \quad (4.3)$$

donde,  $P_{rf}$  es la potencia recibida en el espacio libre, sin tomar en cuenta obstáculos, reflexión con la superficie terrestre o refracción en la atmósfera;  $\rho$  es el coeficiente de Fresnel para la reflexión sobre la frontera de diferentes índices de refracción, que se aplica para ondas que inciden con polarización vertical u horizontal, esto se da cuando el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es paralelo o perpendicular al plano de incidencia, respectivamente.

La potencia recibida en espacio libre está definida por:

$$P_{rf} = P_t \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 G_t(\theta, \phi) G_r(\theta, \phi) \quad (4.4)$$

donde,  $P_t$  es la potencia de transmisión,  $\lambda$  es la longitud de onda de la señal de radio,  $d$  es la distancia entre el transmisor y el receptor,  $G_t$  y  $G_r$  son las ganancias de las antenas de transmisión y de recepción respectivamente. Dichas ganancias están en función de los ángulos de elevación ( $\theta$ ) y azimutal ( $\phi$ ), tomando su máximo valor en su variación con los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  de coordenadas esféricas.

La ganancia máxima puede expresarse en función de las áreas efectivas de las antenas  $A_e$ , dada por  $A_e = G \frac{\lambda^2}{4\pi}$ .

Si tomamos en consideración que la superficie de reflexión es menor que la primera zonas de Fresnel, debemos usar la difracción de Fresnel para hallar la potencia que recibe el transmisor. La potencia recibida entonces es dada por

$$P_r = P_{rf} 4[C^2(u) + S^2(u)][C^2(v) + S^2(v)]\rho^2, \quad (4.5)$$

donde, C(x) y S(x) son las integrales de Fresnel, además,

$$u = \frac{c}{(\lambda a)^{1/2}}, \quad (4.6)$$

y

$$v = \frac{b\theta}{(\lambda a)^{1/2}}. \quad (4.7)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia,  $\lambda$  la longitud de onda,  $a$  la mitad del camino recorrido,  $b$  es el largo de la superficie en la dirección de propagación y  $c$  es el ancho de la superficie en la dirección perpendicular a la propagación [18].

## 4.8. Coeficiente de reflexión de Fresnel para una capa de inversión elevada

En esta sección analizamos varios perfiles de  $n$ , conforme con nuestro modelo  $n(z)$ , para determinar el coeficiente de reflexión parcial cuando una onda corta de radio incide sobre la capa de inversión elevada, y se produce su reflexión en un porcentaje muy pequeño, pero captable por una receptora.

### 4.8.1. Cambio discontinuo

Primero vemos qué pasa cuando el cambio del índice de refracción  $n$  es discontinuo, con un salto de  $n_0$  a  $n_1$ .  $n$  toma el valor desde la superficie hasta la base de la inversión,  $n = n_0$  y luego salta a un valor de  $n = n_1$ . Esto corresponde a tomar  $L=0$  en nuestro modelo 4.1.

El coeficiente de reflexión para una onda de polarización horizontal en este caso está dado por [Budden, K., [14] pág. 91]:

$$\rho_o = \frac{n_0 \cdot \text{sen}\theta - n_1 \cdot \text{sen}\psi}{n_0 \cdot \text{sen}\theta + n_1 \cdot \text{sen}\psi}, \quad (4.8)$$

y por

$$\rho_o = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\theta - n_0 \cdot \text{sen}\psi}{n_1 \cdot \text{sen}\theta + n_0 \cdot \text{sen}\psi}, \quad (4.9)$$

para una onda con polarización vertical, donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia y  $\psi$  el ángulo de refracción, medidos respecto de la horizontal, pero como tomamos el ángulo de incidencia pequeño, ambos coeficientes serán aproximadamente iguales. Definimos la reflectividad como:

$$R = 10 \text{Log}(\rho^2). \quad (4.10)$$

#### 4.8.2. Capa con espesor

Esta vez asumimos que la capa tiene un determinado espesor y el coeficiente de reflexión será calculado de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{-1}{2\theta^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(z)}{dz} e^{-i2k \text{sen}\theta z} dz \quad (4.11)$$

Esta fórmula es propuesta teniendo en cuenta: la forma del perfil de  $n$ , en que su gradiente fuera de la inversión es cercano a cero, y que el ángulo de incidencia  $\theta$  es pequeño. Su deducción se hace mediante dos formas: una suponiendo capas más delgadas, que forman la lámina de reflexión, y otra usando el método WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) [ver James R. Wait [19]].

Para la primera forma, tenemos que cada laminilla tiene un  $\delta n$ , y hallamos el coeficiente  $\rho$  para cada interfase. Usando la ecuación (4.8), pero para ángulos pequeños, se tiene :

$$\rho = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 2\delta n}}{\theta + \sqrt{\theta^2 + 2\delta n}} \quad (4.12)$$

donde  $\theta \ll 1$  y  $n = 1 + \delta n$ .

teniendo  $2\delta n \ll \theta^2$ , obtenemos:

$$\rho = \frac{\delta n}{2\theta^2} \quad (4.13)$$

Tomamos el  $\delta\rho$  en un diferencial de capa y lo integramos sobre toda la capa, pero considerando el cambio de fase con el factor  $e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}} = e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}$  y su origen en el centro de la inversión, obtenemos:

$$\rho = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2\theta^2} \frac{dn}{dz} e^{-iKz} dz \quad (4.14)$$

Antes de ver qué sucede si usamos un perfil de  $n$  en forma de la función erf explicaremos porqué el factor de la fase es  $e^{-i2k\text{sen}\theta z}$ . Esto se da al momento de calcular la diferencia de camino cuando la onda entra e incide sobre un medio irregular, para el caso de reflexión, calculamos la diferencia de vectores de onda para cuando incide y se refleja [ver figura 4.8], encontrándose:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 = 2k\text{sen}\theta \hat{n} \quad (4.15)$$

si  $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_1| = k$ .

$\mathbf{K}$  está en la dirección vertical  $\hat{n}$ ,  $\hat{n}$  es el vector unitario normal al plano de reflexión.

Para ángulos muy rasantes, tenemos:

$$K = 2k\theta \quad (4.16)$$

La otra forma se deduce del método WKB para la reflexión en un medio estratificado [19], que define:

$$\rho \approx \frac{-1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \left[ \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} \right] \exp \left[ -2i \int_0^z q dz \right] dz \quad (4.17)$$

donde  $q = k_0(n^2 - \cos^2(\theta))^{1/2} = k_0(\text{sen}^2(\theta) + 2\delta n)^{1/2} \approx k_0\text{sen}\theta$ , suponiendo  $n(z) = 1 + \delta n(z)$ ;  $z_1$  y  $z_2$  los extremos de la capa de inversión, y se ha supuesto que el medio de 0 a  $z_1$  es homogéneo. Además,

$$\frac{dq}{dz} = \frac{k_0}{\text{sen}\theta} \frac{d}{dz}(\delta n) = \frac{k_0}{\text{sen}\theta} \frac{dn}{dz} \quad (4.18)$$

usando la condición de que  $\text{sen}^2\theta \gg 2\delta n$ .

Obtenemos la ecuación 4.11 para el coeficiente de reflexión, pero cambiando sus límites de integración, para así poder expresar el cálculo de  $\rho$  como la transformada de Fourier de la derivada de  $n$  con respecto a la altura  $z$ ,  $g(K)$ , multiplicada por un factor.

$$\rho = \frac{-1}{2\theta^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dn}{dz} \right) e^{-iKz} dz \right] = \text{const.} g(K) \quad (4.19)$$

con

$$g(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dn}{dz}\right) e^{-iKz} dz. \quad (4.20)$$

De acuerdo con las propiedades de la transformada de Fourier, podemos también usar sólo la transformada de  $n$

$$F[f'] = iK F[f] \quad (4.21)$$

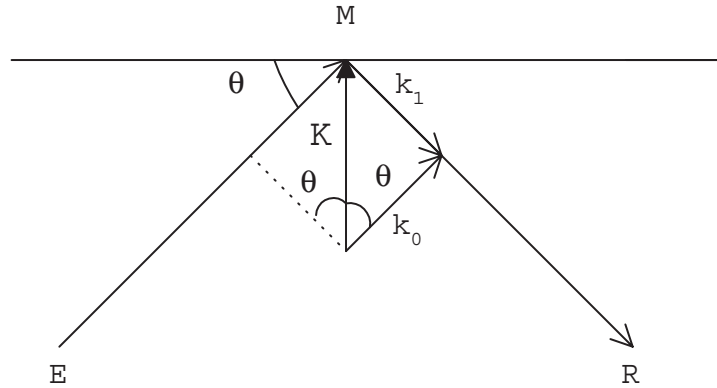


Figura 4.8: El número K para medir la escala de las irregularidades

## 4.9. Coeficiente de reflexión para el perfil ideal

De la forma cómo varía  $n(z)$  con la ecuación 4.1, calculamos el coeficiente de reflexión cuando incide una onda polarizada horizontalmente, con un ángulo de incidencia  $\theta$  (pequeño con respecto a la horizontal), sobre la capa de inversión, con el perfil en función de  $\text{erf}(z)$ , usando la fórmula de  $\rho$ . Para calcular la derivada de  $n$ , primero hacemos el cambio de  $z = z' - z_0$ .

$$\frac{dn(z)}{dz} = \frac{-\Delta n}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{L} \cdot e^{-z^2\pi/L^2} \quad (4.22)$$

Aplicando la ecuación (4.19) obtenemos :

$$\rho = \frac{1}{2\theta^2} \Delta n \frac{1}{L} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2\pi/L^2} \cdot e^{-iKz} dz \right] \quad (4.23)$$



El término entre corchetes no es más que la transformada de una función gaussiana, dada por:

$$\frac{1}{L'\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2L'^2} e^{-iKz} dz = e^{-K^2L'^2/2} \quad (4.24)$$

donde  $L = L'\sqrt{2\pi}$ . Luego,

$$\rho = \frac{\Delta n}{2\theta^2} e^{-K^2L^2/4\pi} = \rho_o e^{-K^2L^2/4\pi}, \quad (4.25)$$

donde  $\rho_o$  es el coeficiente de reflexión para el salto discontinuo ( $L=0$ ). En la fig.(4.9), representamos este coeficiente para valores de  $\Delta N = 37$  y  $\theta = 0,0147$  rad, donde observamos que para un valor de KL de 9 ó 10, el coeficiente de reflexión tiende a cero. Esto indica que  $L$  tiene que ser mucho menor que  $50\lambda$  para que haya una reflexión aceptable.

#### 4.10. Ruido que afecta la transmisión

Aparte de la señal deseada, en la practica todos los receptores captan ruidos o señales indeseables de otras fuentes. Para que la señal recibida sea útil, esta debe estar por encima de los niveles del ruido. Estos ruidos se pueden representar por una temperatura de ruido en la antena. Entre estos ruidos tenemos el ruido del medio que rodea a la antena receptora; el ruido atmosférico producido por rayos; el ruido cósmico producido por la galaxia que emite señales, incluyendo el Sol. Si la antena está dirigida hacia esos objetos recibe más ruido. Además, tenemos el ruido producido por los seres humanos, incluyendo líneas de tensión y generadores de potencia; y el ruido producido por el mismo receptor, debido a sus circuitos, su resistencia, las líneas de transmisión.

Para las señales VHF y UHF sólo consideramos el ruido cósmico, con una temperatura del ruido térmico obtenida de una gráfica ya tabulada, donde se observa la variación de la temperatura con la frecuencia. La temperatura térmica del ruido cósmico es inversamente proporcional a la frecuencia de transmisión. Con una buena aproximación se puede establecer que la temperatura media debido al ruido cósmico es dada por

$$T_c = T_o \lambda_o^2, \quad (4.26)$$

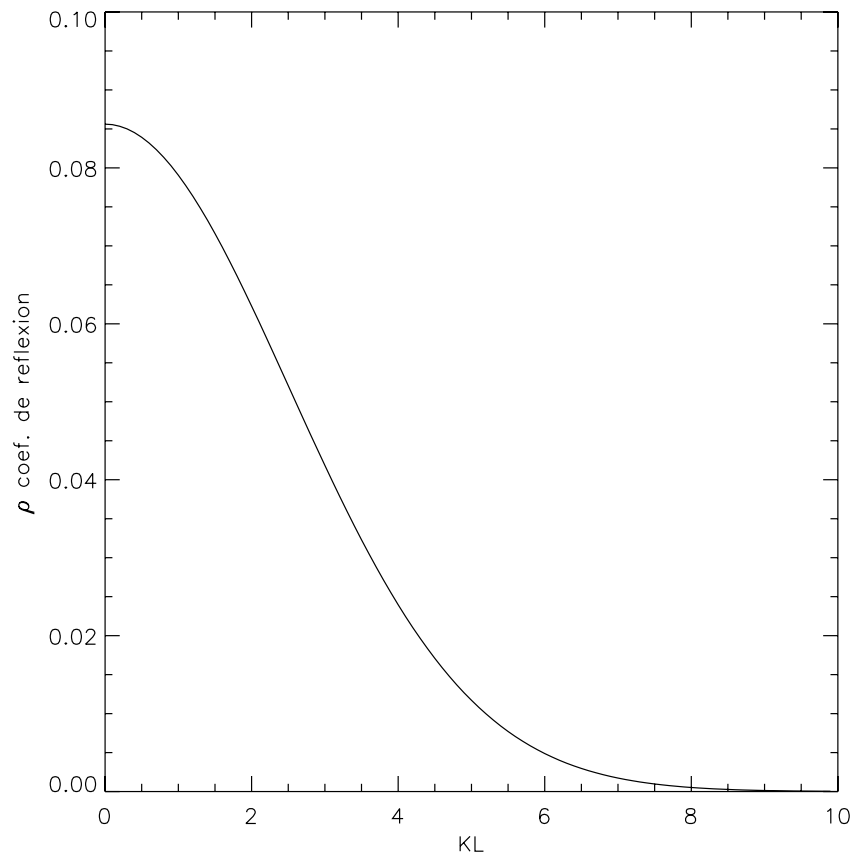


Figura 4.9: Gráfica del coeficiente de Fresnel (ec. 4.25) para el perfil ideal vs  $KL$ , para el índice de refracción en función de  $\text{erf}(z)$

con  $\lambda_o$  en metros y  $T_o = 290$  °K [24].

Se observa que el ruido por el receptor puede ignorarse, además, el ruido por actividad humana no se considera, por suponerse que la zona de estudio es una zona no tan poblada y libre de estos ruidos, como podemos ver en la figura 4.10. La definición del ruido es:

$$P_n = k_B T B \quad (4.27)$$

Donde,  $k_B$  es la constante de Boltzmann con valor de  $1,38 \times 10^{-23}$  W°K<sup>-1</sup> Hz<sup>-1</sup>, B es el ancho de banda de la transmisión de la señal, para la radio en FM es 0,2 Mhz y para la TV es de 6 Mhz; T es la temperatura equivalente del ruido.

Expresando  $P_n$  en mW para luego convertirlo a dBm por:

$$P_n(\text{dBm}) = 10 \text{Log}\left(\frac{P_n}{1\text{mW}}\right) \quad (4.28)$$

Con las ecuaciones 4.27 y 4.28; usando, T temperatura del ruido cósmico igual a 3254,525°K por la ec. 4.26 para  $\lambda = 3,35$  m, B el ancho de banda de la frecuencia a 0,2 Mhz para FM, obtenemos:

$$\begin{aligned} P_n &= 898 \times 10^{-14} \text{ mW} \\ P_{n(\text{dbm})} &= -110,5 \text{ dbm} \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### 4.11. Relación Señal - Ruido (SN)

Para determinar la calidad y utilidad de la señal recibida es necesario calcular la relación existente entre la potencia de la señal recibida S y la potencia del ruido N, a la que definiremos por :

$$\begin{aligned} SN &= \frac{S}{N} \\ SN(\text{db}) &= 10 \text{Log}(S/N) = S(\text{dbm}) - N(\text{dbm}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para que una señal sea útil, ésta debe estar por encima del nivel de ruido, esto es, SN(db) debe ser mayor que 10 db.

Para la televisión hay una escala para definir el tipo de señal cuya calidad de captación es aceptable. Esta escala va desde ‘marginal’ (moderada, mayor que 24 dB) hasta ‘buena’ (unos 42 dB) y una señal no es aceptable si es menor que 24 dB.

## 4.12. Zonas de Fresnel

Para tener una señal que llega en fase sin ser anulada, o para recibir una reflexión coherente, se necesita que los rayos que llegan estén en fase y que su diferencia de camino no sea mayor que la mitad de la longitud de onda,  $\lambda/2$ . Esta claridad está dada por la primera zona de Fresnel, la zona donde se reflejan los rayos. El área del espejo debe ser mayor a una zona de Fresnel.

Hay otras zonas que continúan con la diferencia de camino de  $n\lambda/2$ . Estas ocasionan una interferencia destructiva o constructiva. En el camino directo entre el transmisor y receptor, se puede decir que son visibles estas antenas, a pesar que hay un obstáculo entre ellas como un plano, si su radio de Fresnel de la primera zona no intercepta al obstáculo. Esto se explica por la teoría de difracción de las ondas.

Para el caso de la reflexión en una capa superior, se deduce que estas zonas son elipses, formadas por la intersección del plano de reflexión con las elipsoides que cumplen con la condición de :

$$\Delta R = n\frac{\lambda}{2} \quad (4.31)$$

De la figura 4.11, la diferencia de camino  $\Delta R = r - r_0$ , donde  $r$  es cualquier camino que llegue al receptor (TMR),  $r_0$  el camino (TPR) de la reflexión en el punto P.

Para la elipse de la primera zona de Fresnel tenemos los valores de su eje mayor, paralelo al camino, y el eje menor perpendicular al camino.

De la figura C.1 del apéndice C, tenemos el transmisor a una altura de  $H_1$  y el receptor a una altura de  $H_2$  desde eje X, la distancia entre receptor y transmisor es  $d$ . Hacemos la transformación a un sistema de coordenadas  $X'Y'Z'$ , cuyo origen se ha trasladado al centro del camino entre T y R, y girado en un ángulo  $\beta$ , de manera tal que el eje  $X'$  es paralelo a la línea que une el transmisor T y el receptor R.

Del apéndice C, los elipsoides que cumplen con la condición anterior se expresan por:

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{(y'^2 + z'^2)}{b'^2} = 1 \quad (4.32)$$

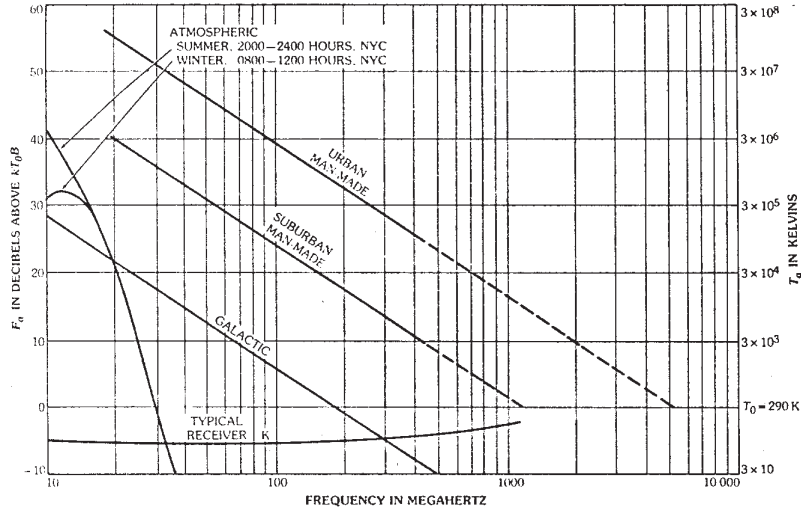


Figura 4.10: En la gráfica se muestra las diferentes temperaturas y potencia promedio del ruido para varias fuentes en función de la frecuencia de la señal (antena omnidireccional cerca de la superficie. Tomado de Reference Data for Engineers [20].

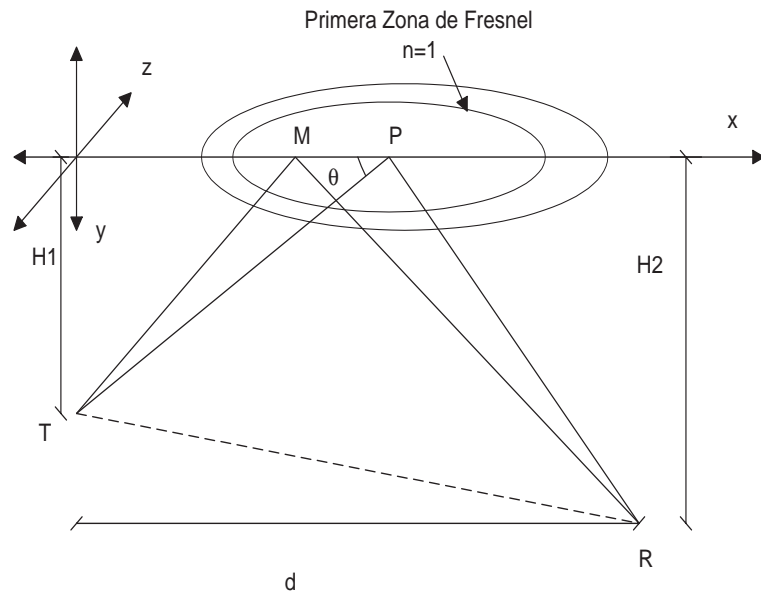


Figura 4.11: Zonas de Fresnel

con los semiejes mayor y menor,  $a'$  y  $b'$ , respectivamente, en el sistema de coordenadas  $X'Y'Z'$ , usando las relaciones de transformación de coordenadas, obtenemos la elipsoide en el sistema  $XYZ$ .

Para hallar las elipses de la zonas de Fresnel en el eje  $X$ , hacemos  $y=0$ , en la elipsoide que forman las zonas de Fresnel, obteniendo las elipses

$$\frac{(x - x_0)^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1 \quad (4.33)$$

donde:

$$x_0 = \frac{d}{2} - \frac{H \operatorname{sen} \beta \cos \beta (a'^2 - b'^2)}{fc} \quad (4.34)$$

$$B^2 = b'^2 - \frac{b'^2 H^2}{fc} \quad (4.35)$$

$$A^2 = B^2 \frac{a'^2}{fc} \quad (4.36)$$

$$fc = b'^2 \cos^2 \beta + a'^2 \operatorname{sen}^2 \beta \quad (4.37)$$

Con  $a'$  y  $b'$  igual a

$$a' = \frac{D + \delta}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + (H1 + H2)^2} + \delta}{2} \quad (4.38)$$

Y

$$b' = \sqrt{a'^2 - c^2} \quad (4.39)$$

Con

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + (H2 - H1)^2} \quad (4.40)$$

definido  $\operatorname{sen} \alpha = b'/a'$ , siendo el eje mayor igual a  $2A$  y el eje menor igual a  $2B$ .

Entonces

$$L = 2B \frac{a'}{\sqrt{fc}} \quad (4.41)$$

$$l = 2 \sqrt{b'^2 - \frac{b'^2 H^2}{fc}} \quad (4.42)$$

Si  $H1=H2$ , el ángulo  $\alpha$  será igual al ángulo de incidencia  $\theta$ . Además, como  $d$  es mucho mayor que  $H1$  y  $H2$ , tenemos que:

$$l = 2B = \sqrt{d\lambda} \quad (4.43)$$

$$L = 2A = \frac{\sqrt{d\lambda}}{\alpha} \quad (4.44)$$

como se puede hallar en el trabajo de Du Castel [6].

### 4.13. Criterio de Rugosidad de Rayleigh

Podemos aplicar un criterio formulado por Rayleigh para determinar si una superficie provoca una reflexión especular o difusa. Si la superficie tiene deformaciones de altura  $h$  e incide sobre ella una señal con longitud de onda  $\lambda$  y ángulo  $\theta$ , provoca reflexión especular si la diferencia de camino entre los rayos de la parte superior e inferior del abruptamiento es menor a  $\lambda/2$ , lo cual se expresa en:

$$\text{sen}\theta < \frac{\lambda}{4h} \quad (4.45)$$

Este criterio no es tan preciso, pero nos da una idea de cómo se comporta la reflexión ante una superficie rugosa.

### 4.14. Caso para Radio Programas del Perú (RPP-89,7 Mhz).

En esta sección calcularemos la razón señal - ruido, SN, Lima - Paracas con diferentes perfiles del índice de refracción.

Primero usaremos los perfiles de un salto abrupto en los 1000 m, manteniendo el índice de refracción constante arriba y abajo, con los valores  $n_1$  y  $n_0$  respectivamente.

Luego usaremos el mismo salto, pero con la variación de  $n$  con la altura antes del salto de  $n$  y el efecto que éste tiene en el ángulo de incidencia por efecto de la refracción.

Finalmente, usaremos la misma capa de inversión elevada, pero con un espesor finito que varía de 0 a 100 m, de acuerdo a una función error para  $n$ .

#### 4.14.1. Características

Las características de transmisión de RPP se dan en la tabla 4.3. De la ecuación 4.4 calculamos la potencia en el espacio libre. Como la señal transmitida es de polarización circular y se capta con una antena Yagui, que recibe sólo la señal en polarización lineal, entonces se toma la mitad de la potencia (sumando -3 db en  $P_{rf\text{db}}$ ). Tenemos:

$$P_{rf} = 0,00134 \text{ mW}, \quad (4.46)$$

Potencia de Transmisión	30 kw
Altura de la antena	30 m.
Polarización	circular
Ganancia	7 db
Frecuencia de transmisión	89,7 Mhz
Longitud de onda	3,35 m
Ganancia en recepción	10 db

Cuadro 4.3: Características de transmisión de RPP

expresados en decibeles corresponde a

$$P_{rdb} = -28,7 \text{ dbm.} \quad (4.47)$$

Para el cálculo de los coeficientes de reflexión, tomamos varios casos, suponiendo polarización horizontal.

#### 4.14.2. Casos de la variación de $n$ y cálculo de la Potencia recibida

1. Del perfil ideal tomaremos un medio de  $n$  constante desde la superficie hasta los 1000 m, con  $n_0$  tomado del índice de refracción para la altura de 1000 m del perfil ideal (Tabla 4.1). Luego, un salto discontinuo a  $n_1$ , correspondiente a  $n$  para 1100 m, manteniéndose constante.

Los valores son:

$$n_0 = 1,000303, n_1 = 1,000266 \text{ y un } \Delta n = 0,000037.$$

Por cálculos geométricos se encuentra que una salida de un rayo con ángulo positivo de  $\delta = 11,2$  mrad con la horizontal, no llega a los 200 km, sino a 130 km, después de una reflexión en la capa de inversión. Con  $\delta = 9,7$  mrad, cubre el máximo rango de 164 km. Para  $\delta = 0$  mrad el rayo de la señal no toparía la Tierra (ver Apéndice B).

Esto significa que en este medio los rayos no llegan a 200 km con una reflexión en la troposfera, sino sufren primero una reflexión en tierra o por medio del fenómeno de la difracción se pueda captar las señales.



De la fig. 4.12, para el camino con reflexión en tierra se halla el ángulo de salida  $\delta'$  de la ecuación

$$\frac{d}{a} = 3\pi - 3\text{arcsen}\left(\frac{r_o}{r_1}\text{sen}\delta'\right) - 2\text{arcsen}\left(\frac{r_o}{r}\text{sen}\delta'\right) - \delta' \quad (4.48)$$

donde  $a$  es el radio de la Tierra y es igual a 6371 km (Apéndice B, ec. B.8).

Si sale con un ángulo de  $\delta = -11,2$  mrad ( $\delta' = 1,5596$  rad), sufre primero una reflexión en la tierra y luego reflexión en la capa elevada con un ángulo  $\theta$  con respecto a la tangente en ese punto. Luego, llegando a la superficie a unos 200 km de distancia, de la ley de senos tenemos :

$$\theta = 18,6 \text{ mrad},$$

y por la ley de Snell, obtenemos:

$$\psi = 16,5 \text{ mrad}.$$

El coeficiente de reflexión según la ec. 4.8, será

$$\rho = 0,06$$

La reflectividad es  $R = 10\text{Log}(\rho^2) = -24\text{db}$

De la figura 4.12, usando la ley de senos hallamos:

$$\beta = 1,5765 \text{ rad} \quad y \quad \theta' = 1,5522 \text{ rad}$$

$$\text{Entonces: } \omega' = 12,9 \text{ mrad}, \quad \omega = 5,6 \text{ mrad},$$

$$W = 31,4 \text{ mrad}, \quad d = 200,05 \text{ km}$$

$$y \theta_0 = \omega' + \alpha = 18,6 \text{ mrad}.$$

Este último ángulo es el valor que se emplea para medir cuánto se desvían los rayos por efecto de la refracción desde una línea recta trazada como camino de propagación.  $\theta_0$  es el ángulo de partida con respecto a la horizontal paralela al plano de reflexión. Para este caso es igual al ángulo de incidencia. La potencia recibida será :

$$\begin{aligned} P_r &= P_{rf} * \rho^2 = 4,82 \times 10^{-6} \text{ mW} \\ P_{r(dbm)} &= -53,1 \text{ dbm} \end{aligned} \quad (4.49)$$

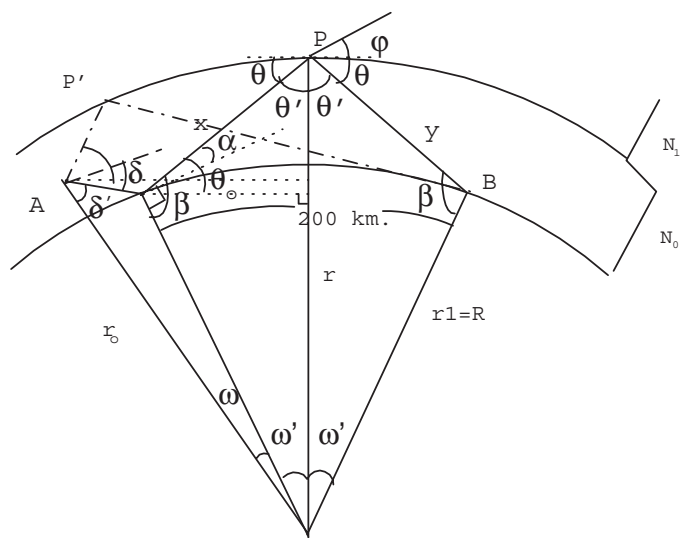


Figura 4.12: Caso 1. Camino de propagación cuando el medio tiene un índice de refracción de la atmósfera para ondas de radio es constante y sufre un cambio discontinuo a una cierta altura.

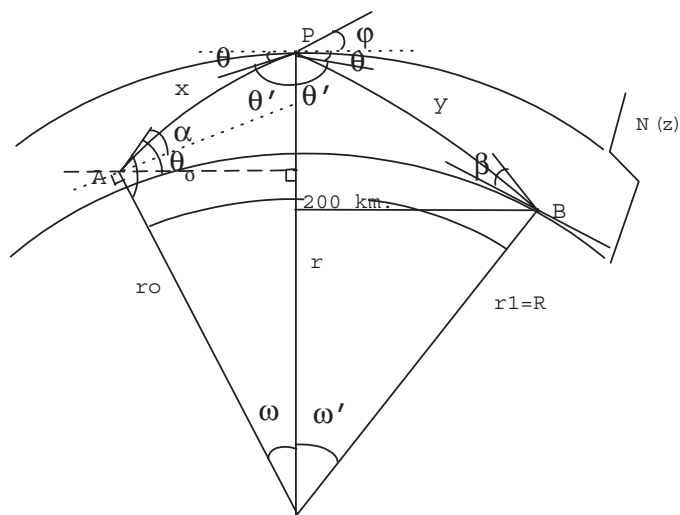


Figura 4.13: Caso 2. Camino de propagación cuando el índice de refracción de la atmósfera para ondas de radio decrece hasta una altura, donde tiene una discontinuidad, para después seguir disminuyendo.

2. En este segundo caso tenemos el mismo salto de  $\Delta n$ , pero con una variación de  $n$  con la altura para la parte de 0 a 1000 m, que está dada por la tabla 4.1. Después del salto, continúa con el valor de  $n_1$  constante o variable. El camino ya no será en líneas rectas por el efecto de la refracción, como se puede ver en la figura 4.13. Para calcular el recorrido, que es de 200 km, se busca el ángulo que nos dé esta distancia, usando el método de trazado de rayos (*Ray Tracing*). Con la fórmula del desplazamiento horizontal de los rayos en función del ángulo de partida  $\alpha$  y del perfil de índice modificado M, cuando se han desplazado verticalmente desde  $z_o$  a  $z_1$ , para una tierra plana, usando  $n = M \times 10^{-6} + 1$  (ver Apéndice B.3). Tenemos la fórmula:

$$r = \int_{z_o}^{z_1} \left| \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - n^2(z_o)\cos^2\alpha}} \right| n(z_o)\cos\alpha \quad (4.50)$$

Evaluando esta ecuación, encontramos que se puede dar el camino con una reflexión parcial en la capa de cambio abrupto de  $n$ , llegando a unos 198 a 200,4 km con los ángulos:

$$\alpha = 7,8 \text{ mrad}, \quad \theta = 14,7 \text{ mrad} \quad \psi = 11,9 \text{ mrad}$$

$\theta'$  se calcula por la ley de senos, conociendo  $\alpha$  y los respectivos  $n_i$  para cada nivel. Por las ecuaciones 4.8 y 4.10, el coeficiente de reflexión es:

$$\rho = 0,105$$

con  $R = -19,6$  dB

El recorrido horizontal hasta la reflexión es de 62,4 km y luego 136,0 km hasta llegar cerca de la superficie. Esto sería por Pisco, cerca a Paracas, obteniendo los valores de:

$$\omega = 9,8 \text{ mrad} \quad y \quad \omega' = 21,6 \text{ mrad}.$$

Por lo tanto:  $\theta_0 = \alpha + \omega = 17,6$  mrad

Se observa que el ángulo de la trayectoria respecto al plano, paralelo al plano de reflexión que pasa por el punto de reflexión,  $\theta_0$ , baja de 18,6 a 17,6 mrad por el efecto de la refracción, siendo  $\theta$  más pequeño que del anterior caso, que era de 18,6 mrad. Esta condición produce una mayor reflexión, que llega

a ser casi total.

La potencia recibida será:

$$P_r = 14,8 \times 10^{-6} \text{ mW}$$

$$P_{r(dbm)} = -48,3 \text{ dbm} \quad (4.51)$$

3. En este caso tenemos casi el mismo medio del caso anterior, pero ahora  $n$  varía en una capa de inversión y un camino de propagación como de la figura 4.14. Asumimos que el perfil de variación de  $n$  en la capa tiene la forma de la función error,  $\text{erf}(z)$ , con la variación del espesor de 0 m a 100 m, todo según la ecuación 4.1.

Con las relaciones anteriores, ec. 4.25 y las características de transmisión de RPP, tenemos:

$$\Delta n = 0,000037$$

En este caso usamos el ángulo de incidencia del anterior caso con refracción.  
 $\theta = 14,7 \text{ mrad}$ ,

$K = 0,0551$  y  $\Lambda = \frac{2\pi}{K} = 114 \text{ m}$ , longitud de escala del espacio. Esto indica que el espesor de la inversión debe ser menor a 114 m para que se note este cambio de  $n$ .

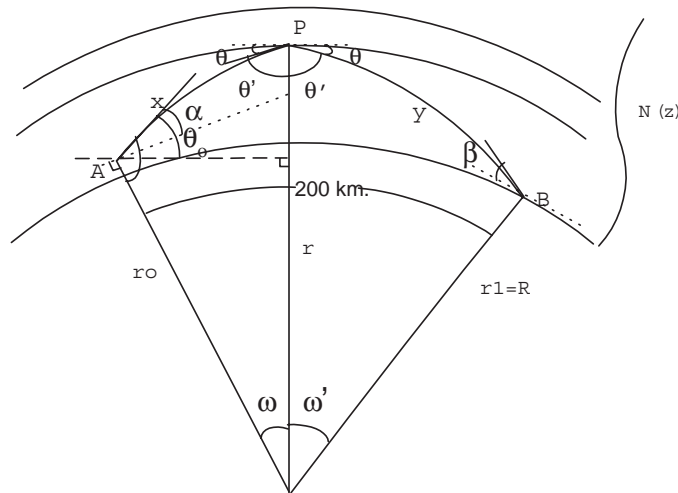


Figura 4.14: Caso 3. Trayectoria del rayo de propagación cuando el índice de refracción de la atmósfera para las ondas de radio varía, tomando la forma de la función erf dentro de una capa, teniendo una gradiente negativa el índice de refracción.

Con estos valores obtendremos los coeficientes de reflexión con la variación del espesor definido L, mostrado en la tabla 4.4:

L(m)	$\rho$	R(db)	$P_r(dbm)$
0	0,0856	-21,4	-50,1
1/K	0,0791	-22,0	-50,7
20	0,0777	-22,2	-50,9
40	0,0582	-24,7	-53,4
50	0,0468	-26,6	-55,3
100	0,0076	-42,3	-71,1

Cuadro 4.4: Coeficiente de reflexión para un perfil en forma de erf(z) con varios valores del espesor

#### 4.14.3. Relación SN

Ahora, con los diferentes valores de la potencia recibida y el ruido, calculamos SN en decibeles por:

$$SN = P_r(dbm) - P_n(dbm) \quad (4.52)$$

Para los casos:

1. SN = 57,3 db
2. SN = 62,2 db
3. ver tabla 4.5

#### 4.14.4. Campo eléctrico recibido

De las potencias calculadas, podemos calcular el voltaje en los terminales de la antena por  $P_r = v^2/R$ , donde  $v$  es el voltaje, R la resistencia de la antena de unos 50  $\Omega$ . Luego calculamos la intensidad de campo eléctrico dividiendo el voltaje entre la longitud efectiva de la antena de media longitud de onda igual a  $\lambda/\pi$ . Conviertiendo el valor en decibeles sobre 1  $\mu V/m$ . Los resultados son:

L(m)	SN (db)
0	60,4
1/K	59,8
20	59,6
40	57,1
50	55,2
100	39,4

Cuadro 4.5: Relación señal-ruido SN usando la tabla 4.4 para varios valores de  $P_r$  para un valor de L

1. Caso 1

$$P_r = 4,8 \times 10^{-6} \text{ mW}, \quad v = 491,1 \text{ } \mu\text{v}, \quad E_{db} = 53,3 \text{ db}$$

2. Caso 2

$$P_r = 14,8 \times 10^{-6} \text{ mW}, \quad v = 859,5 \text{ } \mu\text{v}, \quad E_{db} = 58,1 \text{ db}$$

3. Caso 3 (en la tabla 4.6)

L(m)	$P_r$ (mW) $\times 10^{-6}$	v ( $\mu\text{v}$ )	E(db) sobre 1 $\mu\text{v}/\text{m}$
0	9,8	700,7	56,4
1/K	8,4	652,4	55,7
20	8,1	636,0	55,5
40	4,5	476,4	53,0
50	2,9	383,1	51,1
100	0,1	62,2	35,3

Cuadro 4.6: Valores de la señal captada por reflexión parcial en la capa de inversión para varios valores de  $P_r$  con un valor de L

Observamos que podemos obtener una señal con SN mayor de 50 db por medio de la reflexión parcial, si el espesor de la capa de inversión es menor que 50 m. Si hallamos los valores de la intensidad del campo para la altura de la

antena de 6 m, estos valores suben. Suponemos que lo calculado es para 1 m de altura de la antena receptora. Por la definición dada por la International Telecommunication Union (ITU) para la ganancia de la intensidad del campo por altura de las antenas, tenemos para h (hasta 40 m):

$$\frac{c}{6} 20 \text{Log}\left(\frac{h}{1}\right), \quad (4.53)$$

dados en decibeles, h en metros y c=4 para zona rural; y c=6 para una zona urbana. Esto se agrega a lo calculado. Esta ganancia se debe a múltiples reflexiones en la superficie. Así comparamos los valores de SN del modelo y de lo observado en Paracas. Antes calculamos la intensidad del campo E para 6 m, entonces hallamos la nueva potencia, y finalmente SN para esta altura de la antena. Por una comunicación personal con el Doctor Jorge del Carpio (a cargo del proyecto de Propagación Anómala del Instituto Geofísico del Perú IGP), sabemos el valor promedio de la SN en Paracas para el caso en estudio (RPP) y lo comparamos con el del modelo. Esto es:

- \_ Paracas tiene un SN de 20 a 40 db.
- \_ El modelo da un valor de SN entre 50 a 71 db para un espesor de L de 100 a 0 m.

Para una comparación posterior, la definición de  $(E_r/E_{rf})^2 = P_r/P_{rf}$  es igual en el modelo a  $\rho^2$ . Expresado en decibeles será igual a R(db). Del valor de SN de Paracas, calculamos la potencia recibida, entonces hallamos el valor del campo eléctrico con R = 50 ohmios y longitud efectiva de la antena Yagui de media onda igual a  $\lambda/\pi$ . Usando el valor de la intensidad del campo para el espacio libre anterior obtenemos  $E_r/E_{rf}$  entre los valores de -53 a -43 db para SN de 30 a 40 db. Mientras para el modelo trilineal con reflexión parcial tenemos de -105 a -21 db para L dentro del rango de 200 m a 0 m. Como vemos los valores estimados están de acuerdo con los valores reales.

#### 4.14.5. Primera zona de Fresnel

Para este caso, con  $\lambda = 3,35$  m, obtenemos los valores del lado mayor (L) de la zona y el lado menor (l), dados en el apéndice C:

$$L = 85,666 \text{ km}$$

$$l = 0,8081 \text{ km} \quad (4.54)$$

Mientras que el origen de esta elipse está en  $x_o = 85,674$  km desde el transmisor, el punto de reflexión está a 62,4 km, deducido en los dos últimos caso cuando afecta la refracción en la propagación de las ondas de radio. Indicando que el punto de reflexión se encuentra dentro de la primera zona de Fresnel, y producirá señales coherentes en el receptor.

Según el criterio de Rayleigh , la superficie de la capa de inversión deberá tener unas irregularidades de altura  $h < 57$  m, para poder tener reflexión coherente y no difusa. Estas irregularidades se presentan en la frontera donde empieza la inversión térmica, lo cual se puede observar en las irregularidades que tienen las superficies que forman las nubes cúmulos en la frontera de la capa de inversión. Estas irregularidades pueden ser causadas por la turbulencia en la parte de arriba.

#### 4.15. Casos similares

Como hemos dicho anteriormente, este fenómeno sucede también en las costas de California, donde se llevan a cabo experimentos de recepción de señales de ciertas frecuencias hasta un receptor. Como en nuestro caso, tiene un camino sobre el mar, semejante al que hay entre Lima y Paracas, en esta zona también se ubica un anticiclón, y por lo tanto, hay capas elevadas de inversión de la temperatura y humedad relativa, dando lugar a un valor alto para el gradiente del índice de refracción para ondas de radio, como también para el correspondiente al rango óptico.

Como vemos en la figura 4.15 de datos de temperatura, humedad relativa e índices de refracción para ondas de radio, hay una inversión de temperatura de una subida de 5 °C, no tan alta como los 10 °C en la costa del Perú. La humedad relativa cae de 90 % a 30 % aproximadamente, a una altura de 100 m, dentro de 100 m de espesor. El índice M salta unos 50 M entre los 100m. Se aprecia que se formará un ducto con base en la superficie [21]. Este es uno de los casos que se presentan en esta zona por la variabilidad de la altura de la inversión. Hay días



en los que se tiene las inversiones elevadas, como lo vemos en la figura 4.16, con una base de inversión entre 900 m y 1000 m.

Podemos ver en la figura 4.19 la influencia de la inversión de temperatura en la señal recibida desde junio 1944 a julio de 1945, en la costa de California, específicamente para el camino de San Diego a San Pedro, una distancia de 92 statute miles, llevado a cabo por la Navy Electronics Laboratory NEL. Se observa que para frecuencias bajas la señal es casi constante, aumentando cuando la inversión baja en altitud, e inestable cuando la base de la inversión es alta (como se puede apreciar en la figura 4.20). Para la frecuencia mayor a 545 Mhz ( $\lambda = 55$  cm) la intensidad del campo aumenta considerablemente, pasando el nivel del espacio libre, cuando la base es baja en altura. Cuando está presente la inversión de temperatura las señales medidas tienen un valor mayor que el valor estándar estimado cuando no hay este fenómeno (de Kerr D. [10]).

En esta zona también sucede el fenómeno de Santa Ana, que es una prueba más de la actuación de la reflexión especular por la estratificación de la atmósfera con una inversión de temperatura y caída abrupta de la humedad relativa. Este fenómeno permite ver objetos, como barcos, con su segunda imagen invertida arriba en la atmósfera, como una especie de espejismo. Esto lo podemos apreciar en las figuras 4.17, con sus correspondientes perfiles de temperatura y  $n$  tomados cuando sucedía este fenómeno en la figura 4.18 [22]. Esta clase de espejismo es un fenómeno que también se puede ver en las costas de Japón.

Como hemos visto, nuestro punto de reflexión estaría a unos 64 km del Morro Solar, sobre el mar. Esto lleva a la necesidad de hacer mediciones de los parámetros meteorológicos en el mar, y así poder calcular como varía el índice de refracción en esa zona, además, tener con más precisión el espesor de la capa de inversión. Medir los parámetros meteorológicos tierra adentro nos daría la altitud de la capa de inversión un poco alterada por efecto de que la masa de aire sube a medida que sube el nivel de la superficie.

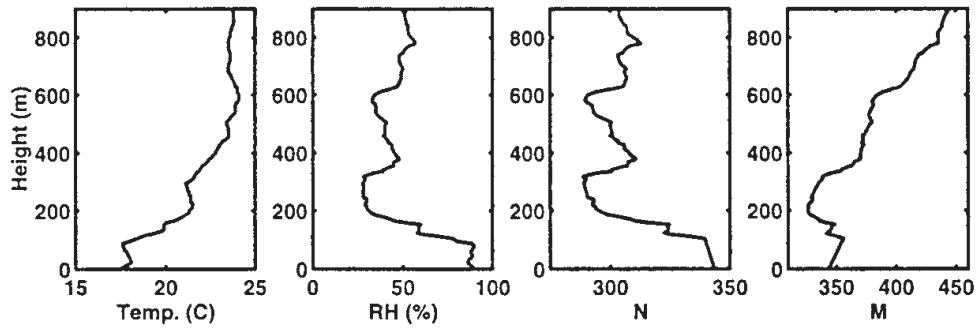


Figura 4.15: Perfiles de temperatura, humedad relativa, refractividad de ondas de radio, refractividad modificada, tomados por radiosondas lanzadas desde R/V Punto Sur (frente a California), el 27 de agosto de 1993, durante la misión VOCAR (Variability of Coastal Atmospheric Refractivity Experiment). (Tomado de Rogers, L.T.[21])

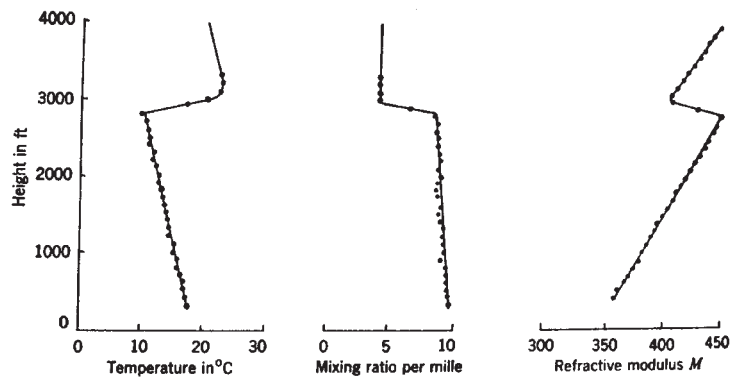


Figura 4.16: Un sondeo a 45 millas al noroeste de San Diego, California, setiembre, 29, 1944, mostrando una inversión elevada de M. (Tomado del libro de Kerr,D.[10])

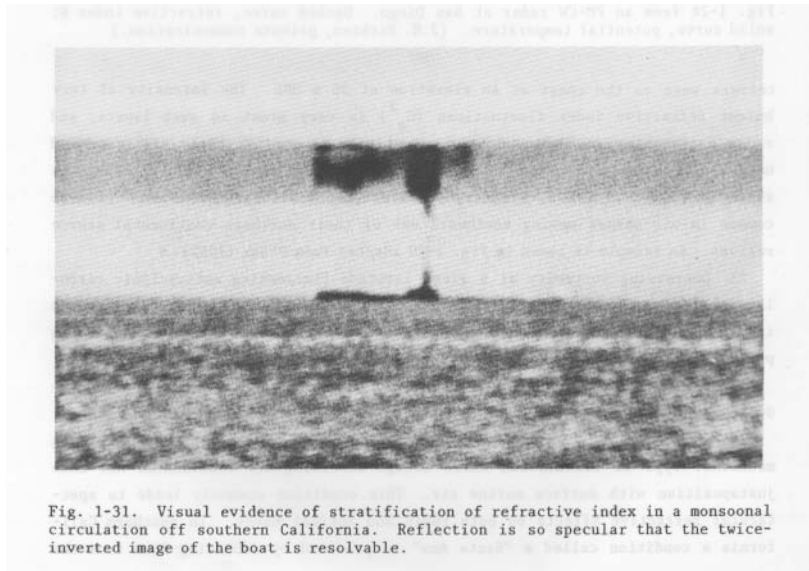


Figura 4.17: Evidencia visual de la estratificación del índice de refracción en una circulación monzonal al sur de California. La reflexión es tan especular que la segunda imagen invertida del submarino es vista. (tomado de Gossard,E. y Strauch,R.[22])

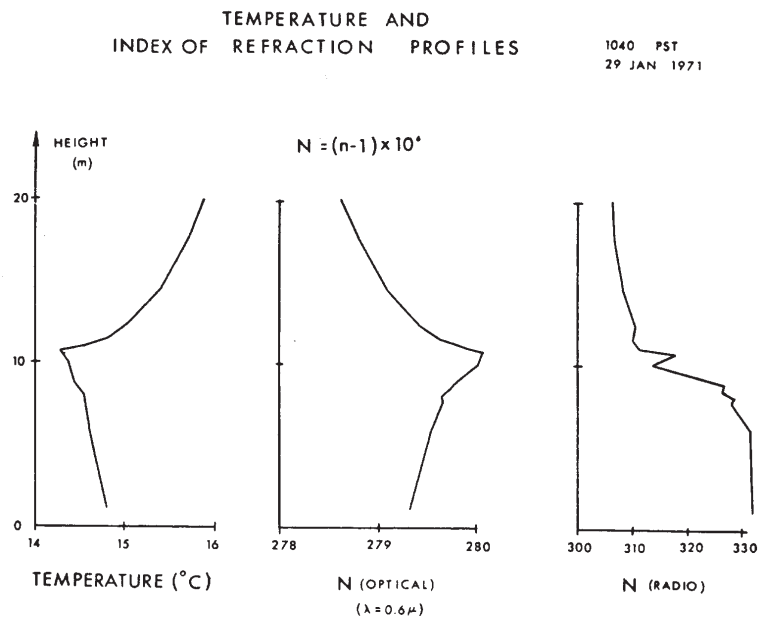


Figura 4.18: Distribución por altura de la temperatura y índice de refracción para el caso mostrado en la Fig. 4.17, registrada en una torre oceanográfica a 2 km de la costa de La Jolla - California, usando un poste alto con un sensor de temperatura y del punto de rocío.

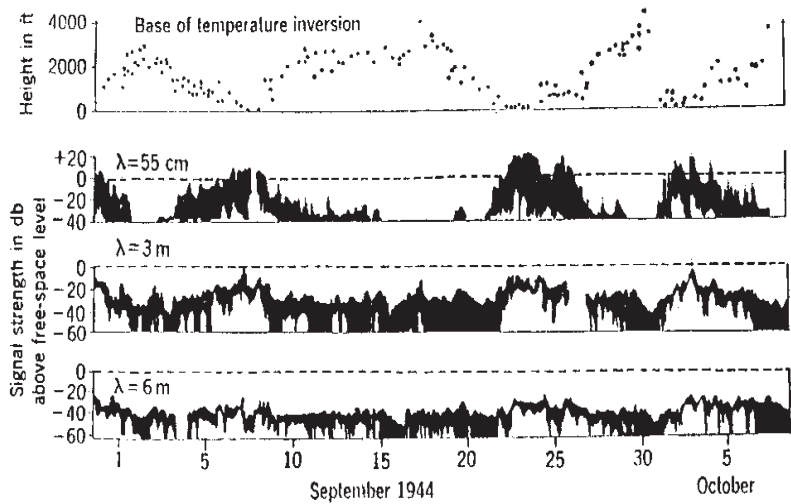


Figura 4.19: Correlación de la señal recibida en California con la altura de la base de la inversión de la temperatura sobre el camino de San Diego - San Pedro. A una distancia de 176 km. Llevado a cabo por la U.S. Navy Electronics Laboratory NEL, San Diego, Calif.

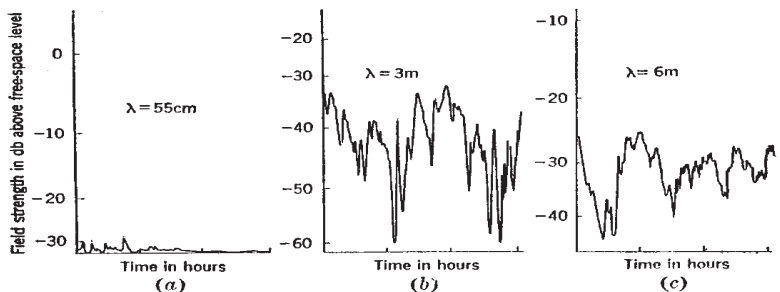


FIG. 4-26.—Typical signal record on the San Diego-San Pedro path when the *M*-inversion was high.

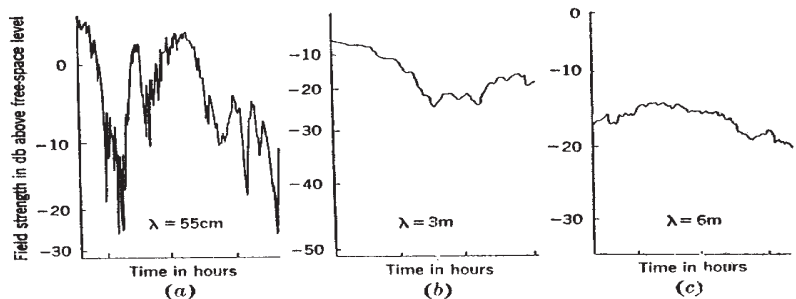


FIG. 4-27.—Typical signal record on the San Diego-San Pedro path when the *M*-inversion was low.

Figura 4.20: Señal registrada para el camino San Diego - San Pedro cuando hubo inversión alta (figura de arriba) e inversión baja (figura de abajo), NEL, San Diego, Calif.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En los capítulos anteriores hemos revisado los conceptos de la propagación de las ondas cortas de radio, en especial, en la banda VHF para las ondas métricas, cuando se propagan en la troposfera. Además, se hace una revisión de las condiciones meteorológicas de la costa peruana, ya que los factores que determinan el índice de refracción de las ondas de radio son principalmente la temperatura y la humedad relativa de la atmósfera. Un estudio de las condiciones meteorológicas de la costa peruana, durante todo el año, nos revela que la atmósfera peruana tiene una inversión de temperatura elevada y mas permanente, características que le diferencia de otras zonas.

Con la ayuda de datos de radiosondas, tomados en Lima durante 20 años, y los tomados en el Radio Observatorio de Jicamarca los dos últimos años, proponemos modelos de perfiles de  $n$  para efectuar nuestro cálculos. Dada la forma de  $n$ , concluimos que estamos en el caso de una **reflexión parcial**, la cual también se ha registrado en otras zonas del mundo con estas mismas características y dentro del rango de la frecuencia de TV y radio FM. Por lo tanto concluimos que:

1. La respuesta dada para la causa de una propagación más allá del horizonte de las señales de TV y radio desde Lima y que son captadas en la zona de Paracas y Pisco, podría ser por el fenómeno de **reflexión parcial**. Este fenómeno es producido por el efecto de tener una inversión de temperatura y caída brusca de la humedad a cierta altura. Estos producen un gradiente grande de  $n$  ó lo suficiente para dar lugar a un coeficiente de reflexión pequeño, pero suficiente para explicar los niveles de recepción experimenta-

dos en Paracas, obtenidos en un esfuerzo paralelo con el Radio Observatorio de Jicamarca del IGP. La reflexión total no se produce porque la ubicación de la antena con una altura de unos 300 m y la altura de la capa de inversión, alrededor de los 1000 msnm, determinan que el punto de transmisión no esté dentro de la zona donde se produce un ducto (que cubre de la altura donde se tiene el valor mínimo del índice M en la inversión, hasta su proyección a una altura abajo de la inversión donde se tiene el mismo valor). Así, no existe un ángulo crítico, como se ha visto en el capítulo 2, si el punto de partida no está en el ducto. Para tener un ángulo rasante de incidencia, además de la altura de la antena y altura de la capa de inversión con sus valores dados para nuestro caso, la refracción ayuda a que las ondas OEM lleguen a la capa de inversión con un ángulo rasante, y lo que ayuda tener una reflexión parcial más eficiente ya que el coeficiente de reflexión usado depende inversamente del ángulo incidente  $\theta$ .

2. La costa peruana tiene una inversión de temperatura en la troposfera, como consecuencia de las bajas temperaturas del mar. Las bajas temperaturas se deben a los vientos alisios porque hacen aflorar las aguas frías de las profundidades, desplazando a las aguas calientes. Este afloramiento produce que la atmósfera baja cerca al mar sea más fría que lo normal. También ayuda a la inversión de temperatura y caída brusca de la humedad relativa su posición al este del anticiclón del sur, una zona de alta presión. El anticiclón hace bajar una masa de aire (subsistencia) de la parte de arriba. Esta masa se calienta por un proceso adiabático. La combinación de ambos fenómenos da lugar a una inversión de temperatura a una cierta altura (entre los 900 m a 1500 m), y se da una caída abrupta de la humedad relativa, de unos 90 %-100 % hasta 15 % a 30 %. La variación se da en el tiempo y espacio. Durante el año la inversión es pronunciada en invierno, después se debilita a medida que se acerca el verano. Luego se fortalece en el otoño, para intensificarse en el invierno, particularmente en los meses de julio, agosto y setiembre, así, esta inversión está presente durante todo el año. Esta inversión es responsable también de que en la costa peruana no llueva y no obstante la alta

humedad en su atmósfera.

3. En concordancia con lo observado por E.E.Gossard [9], las mediciones en CORPAC y las nuestras en el ROJ (y nosotros lo hemos usado en nuestro perfil ideal), existe una imagen inversa entre los perfiles de temperatura y humedad relativa. Se evidencia que la humedad relativa disminuye en forma antisimétrica, en un espesor pequeño de capa a una cierta altura cuando la temperatura aumenta con ésta. Hemos observado también que los datos tomados por las radiosondas no son tan precisos, debido a la lenta reacción de sus sensores, como podemos observar en los perfiles dados en el capítulo 3 que no cumplen esta afirmación. Este problema se debe al promediado y baja resolución de las muestras (tomadas cada 50 m). Por ello los perfiles de la temperatura y humedad relativa obtenidos son a grosso modo, no tan precisos, pero usando sensores de temperatura e higrómetros con precisión y tiempo de respuesta más rápido, se podría obtener  $n$  con más precisión.
4. El efecto que tiene la humedad relativa sobre  $n$  en esta zona con su característica de alta humedad es tan importante que si la humedad se mantiene constante,  $n$  toma la forma de la variación de la temperatura. Además observamos que si la humedad disminuye abruptamente se produce un gradiente más negativo de  $n$  con respecto a la altura, siguiendo la forma de variación de la humedad relativa, porque  $n$  es dominado por el término húmedo dado en la ecuación 2.14, que depende de RH. Como podemos ver en la tabla 4.2, si la humedad relativa disminuye considerablemente, unos 75 %,  $n$  disminuye más de 50 unidades. Si la humedad relativa disminuye de 100 % a 15 %, con el cambio de temperatura de un aumento de 11 °C,  $n$  tiene una disminución de 55 N unidades a la altitud de 1000 m (cap. 4).
5. El camino que recorre la señal es ayudado por la refracción para llegar más allá de su horizonte. Como hemos visto, para un medio constante con un salto de  $n$  a los 1000 m, lo máximo que llegaría sería a 162,4 km de distancia. Con refracción, el camino aumenta a 198 km ó más. En referencia a la potencia recibida, según el capítulo 4, se calcula que sea -53,2 dbm para el primer caso (suponiendo que hay una reflexión ideal en el mar, porque la

señal no llega a los 200 km con una reflexión en la troposfera), y -48,3 dbm para el segundo caso. Sin considerar la pérdida de potencia por efectos de que la superficie donde se refleja sea rugosa, o sea menor a la primera zona de Fresnel, porque se consideró que la superficie de la lámina es mayor y no se multiplica la expresión de la potencia reflejada por el área de reflexión.

Para la capa de inversión con el perfil de  $n$  en forma de la función error  $\text{erf}(z)$  se obtiene una potencia de -50 a -71 dbm( mas 10 dbm para una altura de 6 m de la antena receptora), con un ruido que afecta por igual a los tres casos, de -110,5 dbm.

Se ha escogido este perfil porque es recomendable tener uno continuo, sin esquinas. Las discontinuidades tienen, en su transformada de Fourier, altas frecuencias que hacen sobreestimar la reflexión y la potencia reflejada, como lo sugieren Woodman, R y Chu, Y. [17].

Tenemos la razón entre señal y ruido SN para el caso (1) de 57,3 db; para el caso (2) 62,2 db, y para el caso (3) de 35,3 db a 56,4 db, según la longitud del espesor de L, de 100 a 0 m, respectivamente. Donde se observa que disminuye la relación señal-ruido conforme aumenta el espesor L de la capa (visto en el capítulo 4). Esto indica que se puede seguir perdiendo una parte de la energía y obtener una señal dentro del rango aceptable para poder recibir una señal de buena calidad; ya que en Paracas se obtiene un SN de 20 a 40 db.

Estas afirmaciones se verificarían consistentemente con experimentos de recepción de señal entre Pisco y Paracas y un rastreo del perfil de temperatura y humedad a unos 62,2 km de Lima, entre Chilca y Mala, esto es en el punto de reflexión. La intensidad de la señal calculada puede ser menor porque como vemos la primera zona de Fresnel tiene un largo de unos 87 km. Los puntos del extremo no satisfacen la condición de ángulos de incidencia pequeños.

La posibilidad de usar ondas de radio en la gama de VHF para la comunicación más allá del horizonte es un recurso natural del Perú que debe ser aprovechado.



# Bibliografía

- [1] Bean, B. R. y Dutton, E. J. 1966. Radio Meteorology. US National Bureau of Standards, monograph 92.
- [2] Debye, P. 1957. Polar Molecules. Dover. 89-90.
- [3] Epstein, P. S. 1930. "Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium". Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. 1930. 16. 627-637.
- [4] Friis, H. T., Crawford, A. B., y otros. 1957. "A reflection theory for propagation beyond horizon". Bell Syst. Techn. J. 1957. 36. 627-644.
- [5] Northover, F. H. 1952. "The anomalous propagation of radiowaves in the 1-10 m band". J. Atm. Terrest. Phys. 1952. 2. 106-129.
- [6] Du Castel, F. 1966. Tropospheric radiowave propagation beyond the horizon. Pergamon Press.
- [7] Jackson, John D. 1963. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Born, Max, Wolf Emil. 1965. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Oxford. Pergamon Press.
- [9] Gossard, E. E., Neff, W. D. y otros. 1984. "The fine Structure of elevated refractive layers: Implications for over-the - horizon propagation and radar sounding systems". Radio Sci. 1984. 19. 6. 1523-1533 nov-dec.
- [10] Kerr, Donald E. 1951. Propagation of short radio waves. McGraw-Hill. New York.
- [11] Tyras, G. 1969. Radiation and propagation of electromagnetic waves. Academic Press. New York and London.

- [12] Hall, M. P. M., Barclay, L. W. y otros. 1996. Propagation of Radiowaves. The Institution of Electrical Engineers. London. UK.
- [13] Cohen, Robert y Bowles, K. 1963. "Ionospheric VHF scattering near the Magnetic Equator during the International Geophysical Year ". Journal of Research of the National Bureau of Standards - D Radio Propagation. 67D. 5. sep.-oct.
- [14] Budden, K. G. 1961. The wave - guide mode theory of wave propagation. Logos Press/Prentice - Hall Inc.
- [15] Albrecht, J. A. 1981. The Twenty year average atmospheric structure at Lima, Peru. Tesis de maestría. Florida State University.
- [16] Schweigger, E. 1964. Litoral Peruano. Univ. Federico Villareal. Lima - Perú.
- [17] Woodman, R. F., Chu, Y. 1989. "Aspect sensitivity measurements of VHF backscatter made with the Chung-Li radar: Plausible mechanisms". Radio Sci. 1989. 24. 113-125.
- [18] Picquenard, Armel. 1974. Radio Wave Propagation. John Wiley & Sons. New York.
- [19] Wait, James R. 1962. Electromagnetic waves in stratified media. Pergamon Press Ltd.
- [20] Van Valkenburg, Mac E., Crombie, Douglass D. y otros. 1993. Reference Data for Engineers: Radio, Electronics, Computer, and Communications. Octava edición. Prentice Halls Computer Publishing. Indiana. USA.
- [21] Rogers, L. T. 1997 "Likelihood estimation of tropospheric duct parameters from horizontal propagation measurements". Radio Science. 1997. 32. 1. 79-92.
- [22] Gossard, E. E., Strauch, R. G. 1983. Radar Observation of Clear Air and Clouds. Developments in Atmospheric science 14. Elsevier.

- [23] Smith, E. K. y Weintraub, S. 1953. "The constants in the equation for atmospheric refractive index at radio frequencies". Proc. IRE august - 1953. 71. 1035 - 1037.
- [24] Collin, Robert E. 1985. Antennas and Radiowave propagation. McGraw-Hill Book Company. 324-325.

## Apéndice A

### Índice de Refracción del aire para las ondas de radio

Paul Debye definió la polarización de un líquido cuando se le aplica un campo externo de ondas de radio de alta frecuencia [2]. Consideró una constante dieléctrica para las moléculas polares y no polares. La molécula polar tiene un momento dipolar permanente. La polarizabilidad estará dada por la orientación de las moléculas debido al campo externo impuesto y los mismos momentos dipolares que se orientan. Siendo la polarización  $P$  del líquido polar igual a:

$$P(\omega) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi N_a}{3} \left[ \alpha_o + \frac{\mu^2}{3kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \right] \quad (\text{A.1})$$

donde  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica,  $M$  el peso molecular,  $\rho$  la densidad del líquido,  $N_a$  el número de Avogadro,  $\alpha_o$  la polarizabilidad promedio del líquido sin la interacción de las moléculas,  $\mu$  el momento dipolar permanente,  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta,  $\tau$  el tiempo de relajación requerido para que la orientación inducida por el campo externo a las moléculas vuelvan a su distribución al azar después que deje de actuar el campo externo,  $\omega$  es la frecuencia angular del campo externo.

Esta expresión se puede escribir para campos externos con frecuencias menores de 100 GHz, y si  $\omega\tau \ll 1$  [según las conclusiones de Debye], se obtiene:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi N_a}{3} \left[ \alpha_o + \frac{\mu^2}{3kT} \right] \quad (\text{A.2})$$

El efecto dispersivo del vapor de agua a los 22,5 GHz no se considera importante para frecuencias debajo de los 30 GHz, tampoco la dispersión observada a 60 GHz por la línea de absorción del oxígeno.

Para gases no polares (cuando  $\mu = 0$ ), la expresión A.2 viene a ser :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi N\alpha_o}{3}, \quad (\text{A.3})$$

para gases a bajas presiones aproximamos:

$$\epsilon_r - 1 \approx \frac{\rho}{M} 4\pi N\alpha_o. \quad (\text{A.4})$$

Usando la ley de gases ideales se puede escribir como:

$$\epsilon_r - 1 = C_1 \frac{P}{T} \quad (\text{A.5})$$

donde  $C_1$  es una constante. En forma análoga se puede aproximar ec.(A.2) como:

$$\epsilon_r - 1 = C_2 \frac{P}{T} \left( A + \frac{B}{T} \right) \quad (\text{A.6})$$

donde  $C_2$ , A y B son constantes. Según la ley de Dalton para las presiones parciales de gases, se supone que el resultado final es la suma de los efectos de los gases polares y no polares, obteniéndose:

$$\epsilon_r - 1 = C_{11} \frac{P_d}{T} + C_{21} \frac{e}{T} \left( A + \frac{B}{T} \right) + C_{12} \frac{P_c}{T} \quad (\text{A.7})$$

Donde sólo se han considerado gases no polares como el  $\text{CO}_2$  y el aire seco; y el vapor de agua como gas polar. En A.7.  $P_d$  es la presión del aire seco,  $e$  es la presión parcial del vapor de agua y  $P_c$  la presión parcial del  $\text{CO}_2$ . La expresión para el índice de refracción  $n$  se halla usando la definición  $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ , donde  $\mu_r$  es la permeabilidad del medio con respecto al espacio libre, que para el aire puede ser tomada cercana a la unidad. Si escribimos:

$$n = \sqrt{1 + (\mu_r \epsilon_r - 1)} \quad (\text{A.8})$$

Aproximando

$$n - 1 \approx \frac{\epsilon_r - 1}{2} \quad (\text{A.9})$$

obtenemos una expresión familiar de n:

$$N = (n - 1)10^6 = C_1 \frac{P_d}{T} + C_2 \frac{e}{T} + C_3 \frac{e}{T^2} + C_4 \frac{P_c}{T} \quad (\text{A.10})$$

con  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  constantes. Si se toma la constante dieléctrica del aire libre de  $\text{CO}_2$ , luego al considerarlo habrá que hacer una corrección del 0,02 %, según Smith y Weintraub [23]. De los trabajos experimentales para hallar los valores de

las constantes, se considera los de Birnbaum y Chatterjee [Kerr, D. [10], Bean, B. y Dutton, E. [1]], dando los valores:

$$\begin{aligned} C_1 &= 77,607 \pm 0,13 \frac{^{\circ}\text{K}}{\text{mbar}}. \\ C_2 &= 71,6 \pm 8,5 \frac{^{\circ}\text{K}}{\text{mbar}}. \\ C_3 &= (3,747 \pm 0,031) \times 10^5 \frac{^{\circ}\text{K}^2}{\text{mbar}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La ecuación del índice de refracción es ahora:

$$N = 77,6 \frac{P_d}{T} + 72 \frac{e}{T} + 3,75 \times 10^5 \frac{e}{T^2}, \quad (\text{A.12})$$

con una precisión de  $\pm 0,5\%$ . Con la simplificación de  $P_t = P = P_d + e$  obtenemos:

$$N = 77,6 \frac{P}{T} - 5,6 \frac{e}{T} + 3,75 \times 10^5 \frac{e}{T^2}. \quad (\text{A.13})$$

Pero si hacemos

$$\frac{3,75 \times 10^5}{T} - 5,6 = \frac{K'}{T}, \quad (\text{A.14})$$

para  $T = 273$  °K, resulta  $K' = 3,73 \times 10^5$ , obteniéndose la expresión para  $N$ ,

$$N = 77,6 \frac{P}{T} + 3,73 \times 10^5 \frac{e}{T^2}, \quad (\text{A.15})$$

que se usa ampliamente en el estudio de la propagación de ondas de radio en la troposfera.

## Apéndice B

### Cálculo geométrico del ángulo de incidencia y reflexión sobre un medio con un cambio brusco del índice de refracción $n$ para la propagación más allá del horizonte

#### B.1. Medio con un cambio discontinuo de $n$

La troposfera tendrá un índice de refracción  $N_o$  los primeros 1000 m luego cambiando a  $N_1$ . La señal partiendo a 300 msnm. Con los cálculos veremos si la señal llega a 200 km sufriendo una reflexión parcial a los 1000 m de altura. Según la fig. B.1, calculamos el valor del ángulo de incidencia  $\theta$  con la condición de que al inicio sale un rayo con un ángulo de salida  $\alpha = \gamma - \pi/2$  con respecto a la horizontal en A, con una reflexión de un ángulo  $\theta$  respecto de la horizontal en P, y recorriendo un camino de 200 km, hasta B. Por la Ley de Senos tenemos:

$$\frac{\text{sen } \theta'}{r_o} = \frac{\text{sen } \gamma}{r}$$
$$\frac{\text{sen } \theta'}{r_1} = \frac{\text{sen } \beta}{r} \quad (\text{B.1})$$

entonces obtenemos

$$\frac{r_1}{r_o} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta} \quad (\text{B.2})$$

Como  $W + 2\theta' + \gamma + \beta = 2\pi$

y  $W = \omega + \omega' = d/R$

con  $d = 200$  km y  $R = 6371$  km,

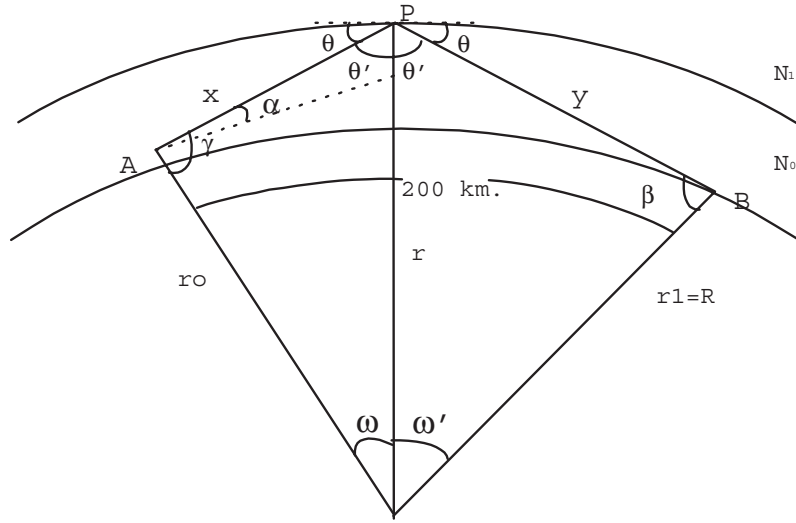


Figura B.1: Camino de propagación en un medio homogéneo con una reflexión y rango de propagación de 200 km.

$d$  es la distancia que subtiende  $W$ , que es el camino recorrido por la señal, y resulta  $W = 31,4$  mrad. Para el cálculo de  $\gamma$  tenemos la siguiente ecuación:

$$W + 2 \arcsen\left(\frac{r_0}{r} \sen \gamma\right) + \arcsen\left(\frac{r_0}{r_1} \sen \gamma\right) + \gamma = 2\pi, \quad (\text{B.3})$$

con  $r_0 > r_1$  y entonces:  $\gamma \neq \pi/2$ .

Si  $r_0 = 6371,3$ ,  $r = 6372,0$  y  $r_1 = 6371,0$  (en km), resolviendo la ecuación para  $\gamma$  por algún método numérico, se obtiene el valor de  $\gamma = 1,5819263$  rad con 7 dígitos de precisión.

Entonces de (B.1)

$$\alpha = 11,2 \text{ mrad y } \theta = 8,5 \text{ mrad.}$$

Analizaremos qué pasa con el ángulo  $\beta$  de (B.2) :

$$\sen \beta = \frac{\sen \gamma}{r_1/r_0} \quad (\text{B.4})$$

Se observa que para que exista  $\beta$ ,  $\sen(\gamma) < \frac{r_1}{r_0} = 0,999953$ , entonces:

$$\begin{aligned} \gamma < 1,56109 \text{ rad} & \quad \text{ó} & \quad \gamma > 1,5805 \text{ rad} & \quad (\text{B.5}) \\ \alpha < -9,7 \text{ mrad} & \quad \text{ó} & \quad \alpha > 9,7 \text{ mrad} \end{aligned}$$



Para que no se refleje en la tierra se debe cumplir:

$$\alpha > -9,7 \text{ mrad} , \quad (\text{B.6})$$

y cuando  $\beta = \pi/2$  obtenemos los valores límites, con los ángulos de  $\alpha = 9,7$  y  $\gamma = 1,5805$  rad. Obteniéndose de la ley de senos y de la gráfica B.1:  $\theta = 17,7$  mrad,  $\omega' = 17,7$ ,  $\omega = 8$  mrad, entonces la distancia recorrida es de 164 km.

De los ángulos anteriores,  $\alpha = 11,2$  mrad,  $\theta = 8,5$  mrad, entonces  $\beta$  debe ser igual a 1.5652 ó 1.5764, como  $\beta$  debe ser mayor que  $\pi/2$ . Tomamos el segundo valor, por lo tanto :

$\omega = 7,4$  mrad y  $\omega' = 13,0$  mrad,

y la distancia será de 130 km lo cual no cumple con B.3.

Con el primer valor de  $\beta$  obtenemos la distancia de 200 km. Pero si el rayo de la señal atraviesa la tierra antes de llegar al receptor. Como  $\beta$  debe ser mayor que  $\pi/2$  entonces no hay un camino 200 km según las condiciones dadas, lo máximo a que llegaría es a 164 km.

## B.2. Alternativa de propagación en un medio discontinuo

Como el caso anterior de propagación no cumplía la condición de que la señal llega a más de 200 km, se plantea que la señal sufre primero una reflexión en la superficie terrestre (mar). De la figura 4.12, donde se considera que hay reflexión en la tierra, se tienen las siguientes relaciones :

$$\frac{\text{sen } \beta}{r_o} = \frac{\text{sen } \delta'}{r_1} \quad y \quad \frac{\text{sen } \beta}{r} = \frac{\text{sen } \theta'}{r_1} \quad (\text{B.7})$$

Para el cálculo del ángulo de salida sabemos que:

$$\begin{aligned} W &= 2\omega' + \omega \\ &= 2(\pi - \beta - \theta') + (\pi - \beta - \delta') \\ &= 3\pi - 3\beta - 2\theta' - \delta' \\ &= 3\pi - 3\text{Arcsen}\left(\frac{r_o}{r_1} \text{sen } \delta'\right) - 2\text{Arcsen}\left(\frac{r_o}{r} \text{sen } \delta'\right) - \delta' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

y  $W = d/R$

R es el radio de la tierra y  $d = 200$  km.

Para  $r_o = 6371,3$ ,  $r = 6372,0$  y  $r_1 = 6371,0$  km, se cumple la ecuación B.8

para  $\delta' = 1,5595461$ , entonces el ángulo de salida con respecto a la horizontal es  $\delta = -11,2$  mrad.

El ángulo de reflexión en la superficie terrestre se calcula usando  $\beta = 1,5765$  rad, entonces  $\alpha = 5,7$  mrad. Esto se obtiene del cálculo de las relaciones B.7.

Así, el ángulo de reflexión será:

$$\theta' = 1,552196 \text{ rad} \quad (\text{B.9})$$

y

$$\theta = 18,6 \text{ mrad}. \quad (\text{B.10})$$

De  $\omega' = \pi - \beta - \theta' = 12,9$  mrad y  $\omega = \pi - \beta - \delta' = 5,6$  mrad tenemos:  $W = 2\omega' + \omega = 31,4$  mrad.

Siendo los tramos de transmisor - tierra 35,6 km, tierra - capa 82,2 km y capa - receptor 82,2 km. El punto de reflexión está a 117.8 km del transmisor. Siendo 200 km la distancia total recorrida.

### B.3. Otra forma para deducir el ángulo de incidencia

Para hallar los ángulos de incidencia y reflexión en la capa de inversión se puede usar también las ecuaciones de desplazamiento de los rayos con el índice modificado M para tierra plana, con  $n(z) = M \times 10^{-6} + 1$ , de la siguiente manera:

el desplazamiento horizontal recorrido cuando el rayo se desliza de una altura  $z_o$  a  $z_1$  con un ángulo inicial  $\theta_o$  en  $z_o$ , estará dado por:

$$r = n(z_o) \cos \theta_o \int_{z_o}^{z_1} \left| \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - n^2(z_o) \cos^2 \theta_o}} \right| = \int_{z_o}^{z_1} |ctg \theta(z)| dz. \quad (\text{B.11})$$

Usando la Ley de Snell:

$$\cos \theta_i n_i = \cos \theta_{i+1} n_{i+1} \quad (\text{B.12})$$

y el desplazamiento horizontal en la capa  $i$  con espesor de 100 m igual a:  $0,1 * cot \theta_i$ .

La suma de todos estos desplazamientos horizontales para el camino con una reflexión (primero, para la primera parte desde su salida del transmisor hasta el punto de reflexión, luego para su retorno a un nivel igual del inicio y finalmente

para su desplazamiento hasta llegar a la antena receptora), será entonces igual a 200 km y estará dado por:

$$d = 2 * 0,1 * \sum_{i=4}^{10} \left( \frac{n_i^2}{(n_3 \cos \theta_3)^2} - 1 \right)^{-1/2} + 0,1 * \sum_{i=1}^3 \left( \frac{n_i^2}{(n_3 \cos \theta_3)^2} - 1 \right)^{-1/2} \quad (\text{B.13})$$

que es útil para todo tipo de perfil del índice de refracción. Teniendo datos para ciertas alturas, pueden ser afinados si cada capa de 100 m se divide en capas de espesor de 1 m y se interpola linealmente los datos de M para estas alturas. Para esto se usa ahora

$$d = 2 * 0,001 * \sum_{i=301}^{1000} \left( \frac{n_i^2}{(n_{300} \cos \theta_{300})^2} - 1 \right)^{-1/2} + 0,001 * \sum_{i=1}^{300} \left( \frac{n_i^2}{(n_{300} \cos \theta_{300})^2} - 1 \right)^{-1/2} \quad (\text{B.14})$$

Para el segundo caso con reflexión en la Tierra se cambia los índices de la primera adición, para sumar de  $i=1$  a 1000. Con lo que se obtiene valores cercanos o exactos al cálculo anterior.

#### **B.4. Propagación en un medio con cambio brusco y continuo de $n$ .**

Para un caso, donde el perfil de  $n$  es dado por los datos del perfil ideal tomado y el camino es igual a la fig. 4.13, con el salto a 1000 m, se usa el método de trazados de rayos, por la ecuación anterior (B.14), estimando los valores de los ángulos de salida y de incidencia. Se obtiene:

$$\alpha = 7,8 \text{ mrad y } \theta = 14,7 \text{ mrad}$$

Que recorre una distancia de 199 km, con el punto de reflexión a 62,4 km del transmisor.

## Apéndice C

# ZONAS DE FRESNEL

Las zonas de Fresnel están definidas de tal manera que la diferencia de camino  $\delta$ , de los caminos que van del transmisor a un receptor, sea menor que un múltiplo de medias longitudes de ondas,  $n\lambda/2$ , como los caminos de la figura C.1, TPR y TMR. Para la primera zona de Fresnel  $n=1$ , es decir, la diferencia de camino, será menor a  $\lambda/2$ , para no producir interferencia en el receptor cuando llegan las señales. Estas zonas son elipsoides con sus focos en el transmisor T y en el receptor R.

De la figura C.1 podemos ver que el transmisor está a una distancia  $H1$  del plano de reflexión, el receptor a una distancia  $H2$  del mismo plano. El plano de reflexión es  $Y=0$  en el eje de coordenadas  $XYZ$ . La distancia de separación de las antenas es  $d$ , paralela al eje X. El punto de reflexión es P. El camino recorrido de TPR es  $D$ , igual a  $2a$ , donde  $a$  es la longitud del semieje mayor de la elipsoide que tiene sus focos en los puntos donde se ubica el transmisor y el receptor.

Para hallar el valor del semieje menor  $b$  del elipsoide sólo tomamos la elipse en el plano  $XY$  y definimos un nuevo eje de coordenadas  $X'Y'Z'$ , rotado de manera que el eje mayor pase por la recta que une el transmisor y el receptor, y trasladando su origen  $O'$  al medio de TR.

La elipse en  $X'Y'$  tiene la distancia focal igual a la mitad de la distancia de  $TR = d'$ :

$$c = \frac{d'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + (H2 - H1)^2} \quad (C.1)$$

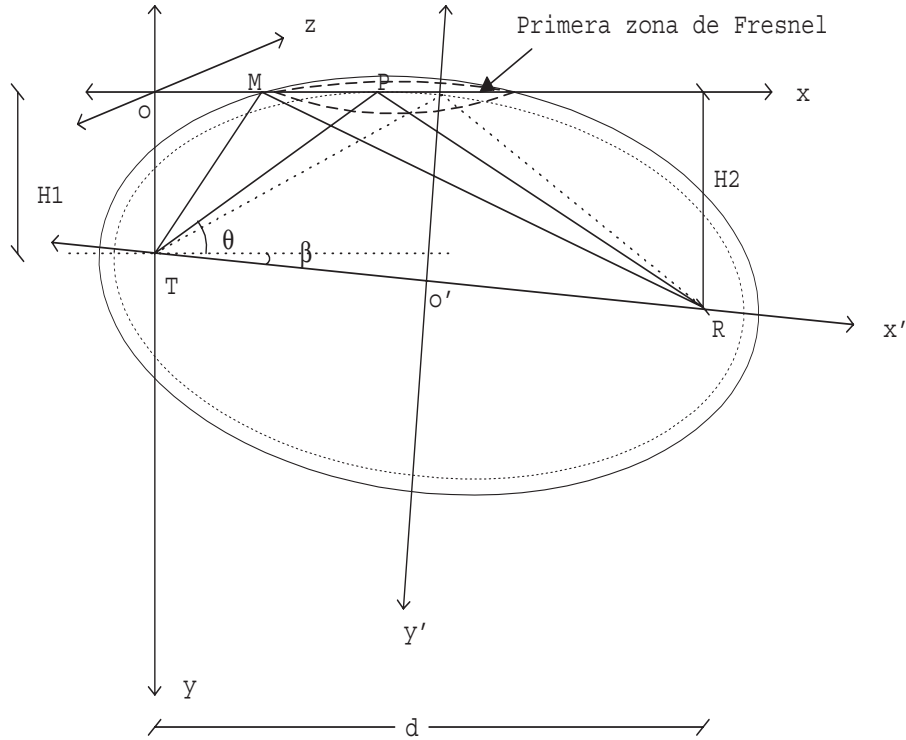


Figura C.1: Primera zona de Fresnel

La distancia  $D=TP+PR$  es:

$$D = \frac{H1}{\text{sen}\theta} + \frac{H2}{\text{sen}\theta} = \frac{H1 + H2}{\text{sen}\theta} \quad (\text{C.2})$$

Donde,  $\theta$  es el ángulo de salida de la señal desde el transmisor y ángulo de reflexión en el punto P. Para eliminar  $\theta$  usamos:

$$d = \frac{H1}{\text{tan}\theta} + \frac{H2}{\text{tan}\theta} \quad (\text{C.3})$$

Entonces:

$$\text{tan}\theta = \frac{H1 + H2}{d} \quad (\text{C.4})$$

y por relaciones trigonométricas hallamos  $\text{sen}\theta$ . Entonces:

$$D = \sqrt{d^2 + (H1 + H2)^2} \quad (\text{C.5})$$

El valor del semieje mayor  $a$  es  $D/2$ , resultando:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{H1 + H2}{2}\right)^2} \quad (\text{C.6})$$

Entonces el semieje menor  $b$  se halla de  $b^2 = a^2 - c^2$ :

$$b = \sqrt{H1H2} \quad (C.7)$$

Para las zonas de Fresnel, el semieje mayor de los elipsoides  $a'$  estará dado por:

$$a' = \frac{D + \delta}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + (H1 + H2)^2} + \delta}{2} \quad (C.8)$$

y el valor del semieje menor  $b'$ , que es igual para el eje  $Y'$  y  $Z'$ , es:

$$b' = \sqrt{a'^2 - c^2} \quad (C.9)$$

La ecuación de la elipsoide en  $X'Y'Z'$  está dada entonces por:

$$b'^2 x'^2 + a'^2 (y'^2 + z'^2) = a'^2 b'^2 \quad (C.10)$$

Con la relación de transformación:

$$x' = \cos\beta(x - \frac{d}{2}) + \text{sen}\beta(y - H) \quad (C.11)$$

$$y' = -\text{sen}\beta(x - \frac{d}{2}) - \cos\beta(-y + H) \quad (C.12)$$

$$z' = z \quad (C.13)$$

$$(C.14)$$

Con:

$$\text{Tan}\beta = \frac{H2 - H1}{d} \quad (C.15)$$

$$H = \frac{H1 + H2}{2} \quad (C.16)$$

Para obtener las zonas de Fresnel en el plano  $Y=0$ , reemplazamos las relaciones de transformación con  $y=0$ , obteniendo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1 \quad (C.17)$$

donde:

$$x_0 = \frac{d}{2} - \frac{H \text{sen}\beta \cos\beta (a'^2 - b'^2)}{fc} \quad (C.18)$$

$$B^2 = b'^2 - \frac{b'^2 H^2}{fc} \quad (C.19)$$

$$A^2 = B^2 \frac{a'^2}{fc} \quad (C.20)$$

$$fc = b'^2 \cos^2 \beta + a'^2 \text{sen}^2 \beta \quad (C.21)$$

Estas son elipses con eje mayor  $2A$  y eje menor  $2B$ .

Para el caso  $H_1=H_2$ ,  $\beta=0$ , tenemos entonces los valores de  $A$  y  $B$ :

$$B^2 = b'^2 - H^2 \quad (C.22)$$

$$A^2 = \frac{B^2}{\left(\frac{b'}{a'}\right)^2} \quad (C.23)$$

y  $b'/a'$  no es más que el seno del ángulo que forman  $c$  y  $a'$ , que lo llamamos  $\alpha$ .

Para  $H_1=H_2$  y  $\alpha = \theta$ , si  $\alpha$  es pequeño porque  $d$  es mucho mayor que  $H_1$  y  $H_2$ , se cumple que para la primera zona de Fresnel ( $\delta = \lambda/2$ ):

$$l = 2B = \sqrt{d\lambda} \quad (C.24)$$

$$L = 2A = \frac{\sqrt{d\lambda}}{\alpha} \quad (C.25)$$

Calculamos para nuestro caso, con  $H_1=0,7$  km,  $H_2=1,0$  km,  $d=200$  km,  $\lambda= 3,35$  m y  $\delta = 1,675$ . Obtenemos:

Para la primera elipsoide:

$$\begin{aligned} a &= 100,003612 \text{ km} \\ b &= 0,836660 \text{ km} \\ c &= 100,000112 \text{ km.} \end{aligned} \quad (C.26)$$

Para la elipsoide con  $n=1$ :

$$\begin{aligned} a' &= 100,004450 \text{ km} \\ b' &= 0,931400 \text{ km} \\ c &= 100,000112 \text{ km.} \end{aligned} \quad (C.27)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A &= 42,833 \text{ km} \\ B &= 0,404069 \text{ km} \\ L &= 85,666 \text{ km} \\ l &= 0,808138 \text{ km} \\ \theta &= 8,5 \text{ mrad} \end{aligned} \quad (C.28)$$

Para la aproximación de  $H_1=H_2$ , tenemos:

$$\begin{aligned}L &= 87,8874 \text{ km} \\l &= 0,818536 \text{ km} \\ \alpha &= 9,31 \text{ mrad}\end{aligned}\tag{C.29}$$

Con el punto  $x_o$  de la elipse igual a  $x_o = 85,6743$  km, el extremo de la elipse cerca al transmisor es  $x = 42,841$  km, y el punto P está a 82,353 km del origen, dentro de la primera zona de Fresnel, que produce una reflexión especular y una señal coherente en el transmisor.