

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

## FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

### ESTUDIO DE TENDENCIAS EN LA REGIÓN F SOBRE JICAMARCA

Tesis para optar el Título de Licenciado en Física, que presenta el bachiller:

**Enrique Luis Alfonso Rojas Villalba**

**ASESOR: Dr Marco Milla**

Lima, Febrero de 2015

## RESUMEN

Alrededor de 30 años atrás, algunos estudios de tendencias a largo plazo basados en modelos numéricos, postularon que debido al aumento de la concentración de ciertos gases de efecto invernadero, se produciría un enfriamiento y encogimiento de la región F de la ionósfera (Roble, 1989). A pesar de múltiples intentos de corroborar estas predicciones, hasta ahora no hay evidencia suficiente apoyando esta conjetura. La razón para esto no es la falta de mediciones ni la estimación de tendencias, que es relativamente sencilla de efectuar, sino, la determinación correcta de las incertidumbres estadísticas en éste análisis.

Para verificar esta predicción, se ha realizado un estudio de la altura de la densidad máxima de la región F utilizando los datos producidos por la ionosonda del Radio Observatorio de Jicamarca. Las mediciones se extienden desde 1993 hasta 2012.

En este trabajo, primero se discutirá el criterio utilizado para armar las series de tiempo a partir de los datos obtenidos, para luego presentar el procedimiento aplicado para determinar la tendencia en el región F, que es similar al usado por Ulich (1997). Además se discutirá la precisión de este estimado, siguiendo la técnica propuesta por Weatherhead (1998), que considera posibles correlaciones en la serie de tiempo.

FACULTAD DE  
CIENCIAS E  
INGENIERÍA

 PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DEL PERÚ

## TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

Título:

“Estudio de tendencias en la región F sobre Jicamarca ” # 38

Propuesto por: Dr. Marco A. Milla

Asesor: Dr. Marco A. Milla marco.milla@jro.igp.gob.pe

 Candidato a Licenciado: Enrique Luis Alfonso Rojas Villalba  
Código 20050531


Introducción:

La ionósfera representa la porción ionizada de nuestra atmósfera. Comienza aproximadamente a partir de los 70 km de altura y ocupa parte de la mesósfera (45 a 95 km), termósfera (95 a 500 km) y exósfera (a partir de los 500 km). Al ser un medio ionizado, la ionósfera cumple un papel protagónico en la propagación de ondas electromagnéticas a nivel mundial y en la interacción con partículas cargadas provenientes del sol, rayos cósmicos, etc.

Existen muchos parámetros que se suelen utilizar para caracterizar el estado de la ionósfera, entre ellos está la altura de la densidad máxima de electrones ( $h_m F_2$ ), este parámetro establece la altura y la frecuencia máxima que pueden utilizarse para la reflexión de ondas electromagnéticas. En general, éste valor es muy importante para las telecomunicaciones terrestres y satelitales, por lo que se viene monitoreando constantemente desde hace casi un siglo.

Desde el siglo diecinueve han habido indicios de que la temperatura de la superficie de la Tierra y de la baja atmósfera presenta una tendencia de aumento. Este comportamiento al parecer está originado principalmente por el incremento de la concentración de los llamados “gases de efecto invernadero” entre los que se encuentran por ejemplo el  $CO_2$  (dióxido de carbono) y el  $CH_4$  (metano).

Los estudios relacionados con el impacto de éstos gases en la baja atmósfera, son abundantes. Sin embargo, parece ser que la influencia de éstas sustancias no es la misma en toda la atmósfera.

A finales de la década de los 80, Roble utilizó un modelo numérico global de la termósfera para analizar si es que la variación del  $CO_2$  y el  $CH_4$  podrían afectar la estructura de la alta atmósfera.

Los valores que Roble utilizó para las concentraciones de  $CO_2$  y  $CH_4$  correspondían al doble del valor de la época, y lo que encontró fue que no sólo se veía afectada la composición química de la termósfera, sino que también se presentaba una disminución de temperatura de alrededor de 50K.



 V.B.  
F. De Zele

Estas predicciones fueron tomadas por Rishbeth (1990), quien las utilizó para encontrar posibles consecuencias del aumento de la concentración de éstos gases en los valores de  $h_mF2$  y la densidad máxima de electrones ( $N_mF2$ ) de la ionósfera.

En base a supuestos relacionados con la variación de la presión a lo largo del tiempo, Rishbeth calculó que éste enfriamiento debería causar una disminución de aproximadamente 17 km para  $h_mF2$  (tomando  $h_mF2=255$  km) y del 3% para  $N_mF2$ .

Teniendo en cuenta la variedad de fenómenos que afectan el comportamiento de  $h_mF2$ , para comprobar la hipótesis de Rishbeth se deben analizar las series de tiempo de  $h_mF2$  sobre periodos de tiempo mucho mayores a los ciclos de variación de los fenómenos que influyen en su comportamiento (Clilverd, 2003).

A pesar de que existe un consenso en la comunidad científica respecto al enfriamiento de la termósfera, como indican los estudios de disminución del coeficiente de fricción en las trayectorias de los satélites artificiales (Keating et al., 2000 y Emmert, 2011), aún no se ha podido determinar si es que  $h_mF2$  está disminuyendo de manera significativa como consecuencia de los gases de efecto invernadero.

Medir la tendencia en una serie de tiempo es una tarea relativamente sencilla, se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de la función que describe la tendencia. En este caso, dadas las pequeñas variaciones que el cálculo teórico predice, bastaría como primera aproximación tomar una recta. Es claro que la dificultad no reside en calcular los parámetros de la recta de ajuste, sino las incertidumbres que vienen con la data que se quiere ajustar. Podemos reconocer cuatro principales dificultades (Ulich, 2003; Lastovicka, 2012) que se presentan a la hora de la comprobación experimental de la hipótesis de Rishbeth:

- *Modelos empíricos*

Dado que se necesitan muchos años de datos para poder identificar tendencias en los valores analizados, se tiene que confiar en los modelos empíricos (utilizados antes de la creación de las técnicas de autoescalamiento y con muchas limitaciones en su aplicabilidad) que se han utilizado para calcular éste y otros parámetros.

- *Calidad de los datos*

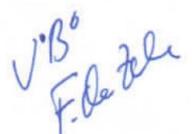
Es frecuente encontrar series de tiempo que han sido generadas por diferentes sondas y escaladas manualmente por diferentes personas, lo que se traduce en nuevas fuentes de incertidumbre, algunas muy difíciles de estimar.

- *Modelamiento y remoción de fenómenos*

Para identificar los efectos de la variación en la concentración de gases de efecto invernadero, se debe intentar eliminar de la serie de tiempo las influencias externas y los posibles ciclos presentes. Para ésto se debe encontrar una técnica que pueda primero modelar con éxito el comportamiento de éstos factores, para luego removerlos de las mediciones.

- *Cálculo de la incertidumbre de los estimados*

Una vez que se pueda asegurar la calidad de los datos (teniendo en cuenta los puntos mencionados), aún se debe establecer la confianza estadística de los parámetros calculados.

**Descripción del tema y objetivos:**

El principal objetivo de éste trabajo es el de utilizar los datos medidos por la ionosonda del ROJ (Radio Observatorio de Jicamarca) para identificar la tendencia positiva o negativa de  $h_mF2$ ,  $N_mF2$  y  $f_oF2$  (frecuencia máxima del plasma ionosférico). Además, se va a presentar la física necesaria para explicar el contexto del problema, así como las herramientas estadísticas que se han escogido para analizar el comportamiento de estos parámetros.

En el capítulo 2 se expondrán los principios físicos y la estructura básica de la ionósfera haciendo énfasis en los procesos relacionados al parámetro  $h_mF2$ ,  $N_mF2$  y  $f_oF2$ . Además, se desarrollará la teoría necesaria para entender la física detrás de la medición de estos parámetros. Por último, se van a exponer brevemente los métodos que utilizaron Roble y Rishbeth para llegar a las conclusiones mencionadas, y de que manera los modelos más modernos contribuyen a este problema. Para esto se expondrán los resultados principales del trabajo de Qian (2008).

En el capítulo 3 se hará una breve descripción de los modelos autorregresivos y cómo es que se pueden utilizar para identificar los parámetros de la tendencia en una serie de tiempo y sus respectivas incertidumbres.

El capítulo 4 servirá para exponer la parte experimental del trabajo, desde la toma de datos, hasta el autoescalamiento de las mediciones y el cálculo de los parámetros de interés. Luego se va a describir de forma resumida el proceso de la lectura de los archivos generados por la ionosonda.

En el capítulo 5 se va a mostrar el análisis de las tendencias de  $h_mF2$ ,  $N_mF2$  y  $f_oF2$ . A medida que el capítulo se desarrolla, se hará evidente cómo el análisis se va haciendo más completo. Se tocarán los temas de la remoción de influencias solares, magnéticas y otras, además de la validez del modelo estadístico elegido.

En el capítulo 6, se presentarán y discutirán los resultados y los límites del análisis.

En el capítulo 7 se muestran las conclusiones y las posibles mejoras que se pueden hacer para trabajos futuros.

**Bibliografía básica:**

- Fels (1980). Stratospheric Sensitivity to Perturbations in Ozone and Carbon Dioxide: Radiative and Dynamical Response, *Journal of the Atmospheric Sciences*.
- Roble (1989). How Will Changes in Carbon Dioxide and Methane Modify the Mean Structure of the Mesosphere and Thermosphere, *Geophysical Research Letters*.
- Rishbeth (1990). A Greenhouse Effect in the Ionosphere?, *Planetary Space Science*.
- Tiao (1990). Effects of Autocorrelation and Temporal Sampling Schemes on Estimates of Trend and Spatial Correlation, *Journal of Geophysical Research*.



- Rishbeth (1992). Cooling of the Upper Atmosphere by Enhanced Greenhouse Gases: Modelling of Thermospheric and Ionospheric Effects, *Planetary Space Science*.
- Bremer (1992). Ionospheric Trends in Mid-Latitudes as a Possible Indicator of the Atmospheric Greenhouse Effect, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*.
- Ulich (1997). Evidence for Long-Term Cooling of the Upper Atmosphere in Ionosonde Data, *Geophysical Research Letters*.
- Weatherhead (1998). Factors Affecting the Detection of Trends: Statistical Considerations and Applications to Environmental Data, *Journal of Geophysical Research*.
- Rishbeth (2000). Annual and Semiannual Variations in the Ionospheric F2-Layer: II. Physical Discussion, *Annales Geophysicae*.
- Lastovicka (2006). Long-Term Trends in foF2: A Comparison of Various Methods, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*.
- Bencze (2007). What Do We Know of the Long-Term Change of the Earth's Ionosphere?, *Advances in Space Research*.
- Qian (2009). The Effect of Carbon Dioxide Cooling on Trends in the F2-Layer Ionosphere, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*.
- Lastovicka (2012). Trends in the Neutral and Ionized Upper Atmosphere, *Space Science Reviews*.

Maximo: 100 páginas

Firma del asesor :



Firma del Coordinador de Especialidad: Francisco De Zele



*A mi familia por el apoyo incondicional a lo largo de toda la carrera.*

*A Sam por ser como eres.*

*A Sue, porque sin ti nada valdría la pena.*



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a todos los profesores de la PUCP, por las enseñanzas y las anécdotas. Especialmente quisiera agradecer al profesor Oré por sus palabras de aliento y al profesor de Zela por el apoyo.

Quisiera agradecer también a todo el personal del Radio Observatorio de Jicamarca, especialmente a Jorge Chau por las oportunidades que me dió y a Marco Milla por los consejos y la camaradería.

También quiero agradecer a todos los investigadores con los que tuve la suerte de discutir mi trabajo y mis resultados, especialmente a Jan Lastovicka, Ana Elías, Liying Qian, John Emmert y Stanley Solomon.

Gracias a todos mis compañeros de la sección física, por las aventuras y los sucesos improbables.

Gracias a mi familia por el apoyo aún cuando el panorama se veía tenebroso. Gracias a Samantha por los juegos y las risas. Por último, gracias a Sue por ser mi compañera de vida.

## ÍNDICE

RESUMEN.....	i
APROBACIÓN DEL TEMA DE TESIS.....	ii
DEDICATORIA.....	vi
AGRADECIMIENTOS.....	vii
ÍNDICE.....	viii
<b>1) INTRODUCCION.....</b>	<b>1</b>
1.1) EFECTO INVERNADERO EN LA ALTA ATMÓSFERA.....	1
1.2) OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	4
<b>2) FUNDAMENTOS FÍSICOS.....</b>	<b>6</b>
2.1) FÍSICA DE LA IONÓSFERA.....	6
2.1.1) <i>Formación y estructura del plasma de la ionósfera.....</i>	<i>6</i>
2.1.2) <i>La densidad máxima de electrones y el parámetro <math>h_m F2</math>.....</i>	<i>10</i>
2.2) SONDEOS VERTICALES Y PROPAGACIÓN DE ONDAS EN LA IONÓSFERA.....	14
2.2.1) <i>Ondas TEM en la ionósfera.....</i>	<i>15</i>
2.2.2) <i>Cálculo de ionogramas.....</i>	<i>18</i>
2.3) MODELOS NUMÉRICOS.....	20
2.3.1) <i>Los modelos de Roble y Rishbeth.....</i>	<i>21</i>
2.3.2) <i>El modelo de Qian.....</i>	<i>24</i>
<b>3) MODELOS AR(p) Y CÁLCULO DE TENDENCIAS.....</b>	<b>25</b>
3.1) MODELOS ESTACIONARIOS Y LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN.....	25
3.2) MODELOS LINEALES Y AUTORREGRESIVOS.....	27
3.3) CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE EN LA ESTIMACIÓN DE TENDENCIAS.....	30

<b>4) MEDICIÓN Y PROCESAMIENTO DE DATOS.....</b>	<b>36</b>
4.1) LA IONOSONDA Y LA ADQUISICIÓN DE DATOS.....	36
4.2) INVERSIÓN DEL PERFIL DE DENSIDADES.....	40
4.3) EL FORMATO SAO.....	43
4.4) INCERTIDUMBRE EN LOS DATOS ADQUIRIDOS.....	44
4.5) LECTURA DE PARÁMETROS.....	47
<b>5) PROCESAMIENTO DE DATOS Y ANÁLISIS DE TENDENCIAS.....</b>	<b>49</b>
5.1) CONSTRUCCIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO.....	49
5.2) PRIMERA APROXIMACIÓN Y EL MÉTODO DE BREMER.....	54
5.3) ANÁLISIS DE LOS PRIMEROS RESULTADOS.....	58
5.4) SEGUNDA APROXIMACIÓN.....	64
<b>6) DISCUSIÓN.....</b>	<b>84</b>
6.1) SOBRE LOS RESULTADOS.....	84
6.2) SOBRE LAS LIMITACIONES Y SUPUESTOS.....	85
6.3) SOBRE LAS MEJORAS PROPUESTAS.....	88
<b>7) CONCLUSIONES.....</b>	<b>89</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>91</b>

# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1) EFECTO INVERNADERO EN LA ALTA ATMÓSFERA

La ionósfera representa la porción ionizada de nuestra atmósfera. Comienza aproximadamente a partir de los 70 km de altura y ocupa parte de la mesós-fera (45 a 95 km), termósfera (95 a 500 km) y exósfera (a partir de los 500 km). Al ser un medio ionizado, la ionósfera cumple un papel protagónico en la propagación de ondas electromagnéticas a nivel mundial y en la interacción con partículas cargadas provenientes del sol, rayos cósmicos, etc.

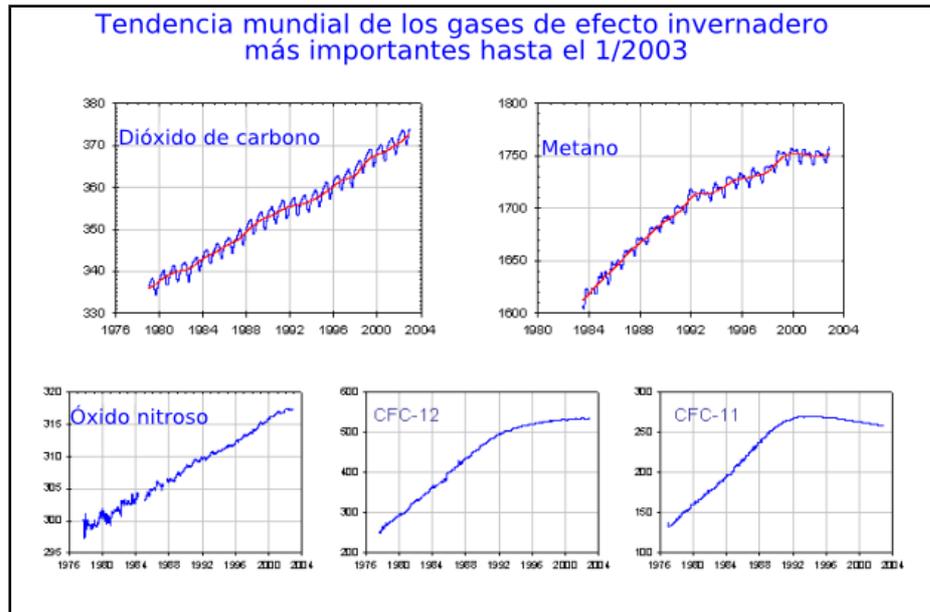
Existen numerosos parámetros que se suelen utilizar para caracterizar el estado de la ionósfera: temperatura de electrones e iones, composición química, conductividad, velocidades de deriva, etc. Entre dichos parámetros resaltan:  $N_mF2$ , la densidad máxima de electrones en la capa F2;  $h_mF2$ , la altura de la densidad máxima de electrones; y  $f_oF2$ , la frecuencia máxima del plasma en la capa F2. Estos parámetros establecen la altura y la frecuencia máxima que pueden utilizarse para la reflexión de ondas electromagnéticas. En general, son muy importantes para las telecomunicaciones terrestres y satelitales, por lo que se vienen monitoreando constantemente desde hace casi un siglo (Bremer, 2004; Bencze, 2005).

Como se verá en el capítulo 2, el valor que toma  $h_mF2$  es resultado de la interacción de la atmósfera neutra con el flujo solar (especialmente EUV) y de los procesos químicos y de transporte característicos de esa altura (alrededor de los 350 km para el ecuador magnético). Esto implica que los valores de  $h_mF2$  van a fluctuar siguiendo los diferentes ciclos relacionados a estos procesos.

Desde el siglo diecinueve han habido indicios de que la temperatura de la superficie de la Tierra y de la baja atmósfera presenta una tendencia de aumento. Este comportamiento al parecer está originado principalmente por el incremento de la concentración de los llamados “gases de efecto invernadero” entre los que se encuentran por ejemplo el  $CO_2$  y el  $CH_4$ .

En la Figura 1.1 podemos ver el aumento de algunos de estos gases, medidos por la NOAA (Thoning, 1989).

Los estudios relacionados con el impacto de éstos gases en la baja atmósfera, son abundantes (Fels, 1980; Basseur 1988; Akmaev, 1998; Cohn 2005). Sin embargo, parece ser que la influencia de éstas sustancias no es la misma en toda la atmósfera.



**Figura 1.1** Medidas expresadas en partes por millón (ppm). Vemos a parte del dióxido de carbono y el metano, al óxido nitroso y dos ejemplos de clorofluorocarbonos (CFC-12 y CFC-11) (Dr. Pieter Tans, NOAA/ESRL ([www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/](http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/)) and Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography ([scrippsco2.ucsd.edu/](http://scrippsco2.ucsd.edu/))).

A finales de la década de los 80, Roble (1987) utilizó un modelo numérico global de la termósfera para analizar si es que la variación del  $\text{CO}_2$  y el  $\text{CH}_4$  podrían afectar la estructura de la alta atmósfera.

Los valores que Roble utilizó para las concentraciones de  $\text{CO}_2$  y  $\text{CH}_4$  correspondían al doble del valor de la época, y lo que encontró fue que no sólo se veía afectada la composición química de la termósfera, sino que también se presentaba una disminución de temperatura de alrededor de 50 K.

Estas predicciones fueron tomadas por Rishbeth (1990), quien las utilizó para encontrar posibles consecuencias del aumento de la concentración de éstos gases en los valores de  $h_m F2$  y  $N_m F2$ .

En base a supuestos relacionados con la variación de la presión a lo largo del tiempo, Rishbeth calculó que éste enfriamiento debería causar una disminución de aproximadamente 17 km para  $h_m F2$  (tomando  $h_m F2 = 255$  km) y del 3% para  $N_m F2$ .

Teniendo en cuenta la variedad de fenómenos que afectan el comportamiento de  $h_m F2$ , para comprobar la hipótesis de Rishbeth se deben analizar las series de tiempo de  $h_m F2$  sobre

períodos de tiempo mucho mayores a los ciclos de variación de los fenómenos que influyen en su comportamiento (Clilverd, 2003).

A pesar de que existe un consenso en la comunidad científica respecto al enfriamiento de la termósfera, como indican los estudios de disminución del coeficiente de fricción en las trayectorias de los satélites artificiales (Keating et al., 2000 y Emmert, 2011), aún no se ha podido determinar si es que  $h_m F2$  está disminuyendo de manera significativa como consecuencia de los gases de efecto invernadero.

Medir la tendencia en una serie de tiempo es una tarea relativamente sencilla: se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de la función que describe la tendencia. En este caso, dadas las pequeñas variaciones que el cálculo teórico predice, bastaría como primera aproximación tomar una recta. Es claro que la dificultad no reside en calcular los parámetros de la recta de ajuste, sino las incertidumbres que vienen con la data que se quiere ajustar. Podemos reconocer cuatro principales dificultades (Ulich, 2003; Lastovicka, 2012) que se presentan a la hora de la comprobación experimental de la hipótesis de Rishbeth:

- *Modelos empíricos*

Dado que se necesitan muchos años de datos para poder identificar tendencias en los valores de  $h_m F2$ , se tiene que confiar en los modelos empíricos (utilizados antes de la creación de las técnicas de autoescalamiento y con muchas limitaciones en su aplicabilidad) que se han utilizado para calcular éste y otros parámetros (Huang, 1982).

- *Calidad de los datos*

Es frecuente encontrar series de tiempo de  $h_m F2$  que han sido generadas por diferentes sondas y escaladas manualmente por diferentes personas, lo que se traduce en nuevas fuentes de incertidumbre, algunas muy difíciles de estimar (McNamara, 2008).

- *Modelamiento y remoción de fenómenos*

Para identificar los efectos de la variación en la concentración de gases de efecto invernadero, se debe intentar eliminar de la serie de tiempo las influencias externas y los posibles ciclos presentes (Ulich, 1997). Para ésto se debe encontrar una técnica que pueda primero modelar con éxito el comportamiento de éstos factores, para luego removerlos de la data de  $h_m F2$ .

- *Cálculo de la incertidumbre de los estimados*

Una vez que se pueda asegurar la calidad de los datos (teniendo en cuenta los puntos mencionados), aún se debe establecer la confianza estadística de los parámetros calculados (Ulich, 2003).

## **1.2) OBJETIVOS Y ORGANIZACION DE LA TESIS**

El principal objetivo de éste trabajo es el de utilizar los datos medidos por la ionosonda del ROJ (Radio Observatorio de Jicamarca) para identificar las tendencias positivas o negativas de  $h_mF2$ ,  $N_mF2$  y  $f_oF2$ . Además, se va a presentar la física necesaria para explicar el contexto del problema, así como las herramientas estadísticas que se han escogido para analizar el comportamiento de éstos parámetros.

En el capítulo 2 se expondrán los principios físicos y la estructura básica de la ionósfera haciendo énfasis en los procesos relacionados al parámetro  $h_mF2$ . Además, se desarrollará la teoría necesaria para entender la física detrás de la medición de éste parámetro. Por último, se van a exponer brevemente los métodos que utilizaron Roble y Rishbeth para llegar a las conclusiones mencionadas, y de qué manera los modelos más modernos contribuyen a este problema. Para esto se expondrán los resultados principales del trabajo de Qian (2008).

En el capítulo 3 se hará una breve descripción de los modelos autorregresivos y cómo es que se pueden utilizar para identificar los parámetros de la tendencia en una serie de tiempo y sus respectivas incertidumbres.

El capítulo 4 servirá para exponer la parte experimental del trabajo, desde la toma de datos, hasta el autoescalamiento de las mediciones y el cálculo de los parámetros de interés. Luego se va a describir de forma resumida el proceso de la lectura de los archivos generados por la ionosonda.

En el capítulo 5 se va a mostrar el análisis de las tendencias de  $h_mF2$ ,  $N_mF2$  y  $f_oF2$ . A medida que el capítulo se desarrolla, se hará evidente cómo el análisis se va haciendo más completo. Se tocarán los temas de la remoción de influencias solares, magnéticas y otras, además de la validez del modelo estadístico elegido.

En el capítulo 6, se presentarán y discutirán los resultados y los límites del análisis.

En el capítulo 7 se muestran las conclusiones y las posibles mejoras que se proponen para trabajos futuros.



## 2 FUNDAMENTOS FÍSICOS

Para entender adecuadamente este trabajo, es necesario explicar ciertos procesos físicos básicos que ocurren en la ionósfera. En primer lugar, hay que revisar cómo es que se ioniza la atmósfera neutra y en especial la física detrás de la producción máxima de electrones. Luego, para comprender el proceso de medición de  $h_m F2$  y  $f_o F2$  realizado por la ionosonda, se toca el tema de la propagación de ondas electromagnéticas a través de la ionósfera. Por último, se expone el modelo de Roble, que motivó toda esta área de estudio, y el de Qian, que ayuda a explicar las numerosas discrepancias entre las mediciones realizadas en diferentes estaciones a nivel mundial.

### 2.1) Física de la Ionósfera

La ionósfera es considerada la región en donde están presentes un número significativo de iones y electrones libres térmicos (energías  $<1$  eV). Éstos son producidos mediante la ionización de partículas neutras principalmente por radiación solar ultravioleta de alta frecuencia y por la colisión con partículas energéticas que penetran la atmósfera. Una vez formada, las partículas cargadas son afectadas por varios procesos: reacciones químicas, difusión, inestabilidades del plasma, efectos de transporte, etc.

#### 2.1.1) Formación y estructura del plasma de la ionósfera

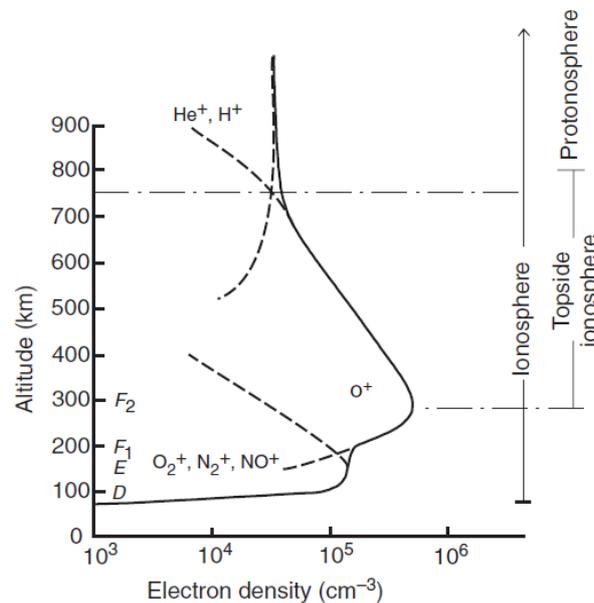
Los iones y electrones formados en los procesos de ionización, tienden a recombinarse y reaccionar con otras especies gaseosas produciendo partículas neutras y otros iones. Luego, podemos intuir que la concentración de electrones en un punto estará dada por la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = P - L - \nabla \cdot (N \mathbf{v}) \quad (2.1)$$

en donde  $P$  representa la producción de iones,  $L$  la pérdida por recombinación y  $\nabla \cdot (N \mathbf{v})$  la pérdida de electrones por movimiento ( $\mathbf{v}$  siendo la velocidad de deriva). Si bien ésta ecuación modela la distribución de la densidad de electrones, las funciones de producción, pérdida y transporte, dependen mucho de la concentración de las diferentes especies neutras y de algunos otros fenómenos seculares (vientos neutros, campo geomagnético, etc). Es esta interacción tan compleja y variada, que da lugar a la morfología característica de la ionósfera terrestre. En la Figura 2.1 se puede apreciar los diferentes iones dominantes para diferentes alturas, además se muestran las diferentes capas (D, E, F1, F2) incluyendo a la “topside ionosphere” y la “protonosphere”, que se refieren a las regiones por encima de  $h_m F2$  y de

predominancia de  $H^+$  respectivamente, ambas dominadas por efectos de transporte (Schunk, 2009).

En las capas D, E y F1 los efectos fotoquímicos y de recombinación son suficientes para explicar en una primera aproximación el perfil de densidad de electrones, sin embargo, éste trabajo se concentra en  $h_mF_2$ , que es el punto en donde la influencia de los efectos de transporte se equipara con los de producción y pérdida. Para entender el origen del parámetro  $h_mF_2$  entonces, se deben modelar las funciones de producción, pérdida y transporte (Rishbeth, 1975).



**Figura 2.1** Las líneas punteadas representan la concentración de los iones mostrados, mientras que las continuas, la de los electrones (Schunk, 2009).

La tasa de producción de iones puede expresarse como el producto:

$$P = \eta \sigma n I \tag{2.2}$$

siendo  $\eta$  la eficiencia de ionización,  $\sigma$  la sección de choque para la absorción,  $n$  la densidad de electrones e  $I$  la intensidad de radiación ionizante. A partir de esto, S. Chapman en 1931, desarrolló una expresión que modelaba la densidad en función de la altura de una capa simple de la ionósfera asumiendo que la atmósfera se encuentra estratificada y que la radiación solar absorbida es proporcional al número de partículas neutras.

Teniendo en cuenta que existen diferentes especies de iones y neutros, para expresar la producción total, se debe tomar en cuenta la contribución de cada especie (Schunk, 2009):

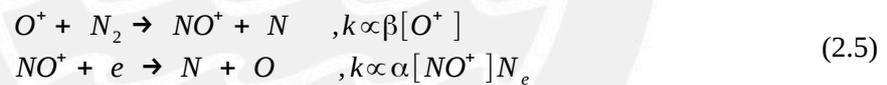
$$P(z, \chi) = \sum_s n_s(z) \int_0^{\lambda_{si}} I_\infty(\lambda) \exp[-\tau(z, \chi, \lambda)] \sigma_s^i(\lambda) d\lambda \quad (2.3)$$

Como es de esperarse, la función (2.3) no sólo depende de la altura reducida ( $z$ ), sino del ángulo del zenith ( $\chi$ ) que representa el ángulo de incidencia de luz solar con respecto a la vertical. Vemos que el índice  $s$  denota la  $s$ -ésima especie neutra, mientras que la intensidad de la fuente ( $I_\infty$ ) y la sección transversal de ionización dependen de la longitud de onda de la radiación ionizante. Por último, el límite de integración ( $\lambda_{si}$ ) corresponde a la longitud de onda asociada la energía de ionización clásica de la  $s$ -ésima especie neutra. La función  $\tau(z, \chi, \lambda)$  corresponde a la profundidad óptica, e indica la atenuación de la intensidad de la radiación. En la capa F2 el principal proceso de fotoionización está dado por:



ya que en ésta región el principal componente neutro es el oxígeno atómico (Figura 2.2).

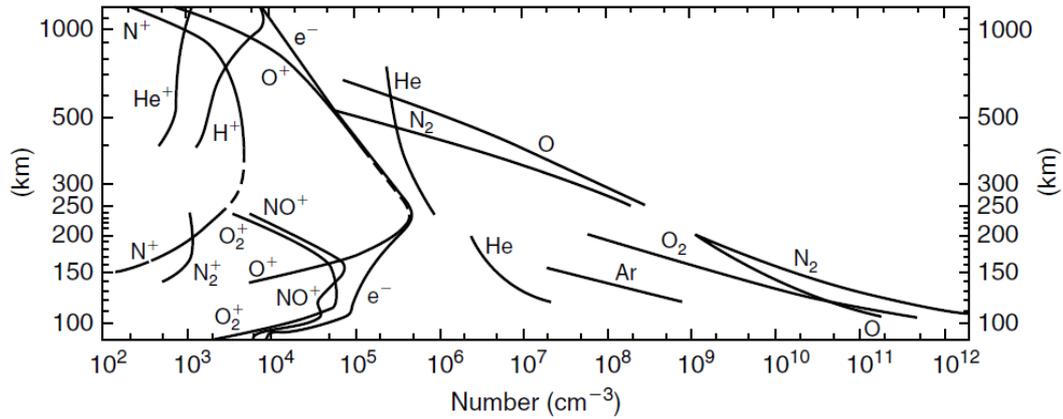
La pérdida por recombinación ( $L$ ) a su vez, puede ocurrir a través de diferentes mecanismos. Estos procesos varían en función de la composición de la ionósfera para diferentes altitudes, en la Figura 2.2, podemos ver de manera más detallada cómo es que se distribuyen las diferentes especies cargadas y neutras en la ionósfera. En la capa F2, la pérdida de iones se da en un proceso de dos pasos:



en donde  $k$  indica la velocidad de reacción,  $\beta$  el coeficiente de acoplamiento y  $\alpha$  el coeficiente de recombinación.

A diferencia de  $\alpha$ , que se puede considerar una constante,  $\beta$  está en función de  $[N_2]$  (con valor mucho mayor a la concentración de electrones en la baja atmósfera) como primera aproximación se considera que no afecta directamente en la velocidad de la reacción.

Para la región alrededor de la densidad máxima de la capa F2,  $[N_2]$  ha decrecido significativamente, de manera que la velocidad de la primera reacción es menor que la de la segunda, en éste caso decimos que la pérdida de electrones está dominada por  $\beta$ , o que es tipo- $\beta$ .



**Figura 2.2** Mediciones realizadas con un espectrómetro de masa sobre el desierto de White Sands en New Mexico y en condiciones de mínimo solar (Kelley, 2009).

En la Figura 2.3 podemos observar una aparente paradoja: no hay ningún máximo de absorción en las alturas correspondientes a la densidad máxima de electrones (de 300 a 400 km para la ionósfera ecuatorial). Debe existir otro mecanismo que pueda explicar entonces el aumento de la densidad a parte del de crecimiento en la tasa de fotoionización.

En la capa F2 se puede considerar que  $N_e = N_i$ , luego, si la velocidad de pérdida de iones está dada por  $\beta [O^+]$  podemos decir también que la velocidad es proporcional a  $\beta N_e$ , de manera que al asumir equilibrio en la ecuación de continuidad (por el momento asumiendo que los efectos de transporte están ausentes) tendríamos que:

$$\beta N_e = P \Rightarrow N_e = \frac{P}{\beta} \propto \frac{[O]}{[N_2]} \quad (2.6)$$

Por otro lado, resolviendo la ecuación de equilibrio hidrostático para la atmósfera neutra, se sabe que la densidad de las diferentes especies, decae exponencialmente con la altura:

$$N_s \propto \exp\left(\frac{-h}{H_s}\right), \quad \text{donde } H_s = \frac{kT}{m_s g} \quad (2.7)$$

Donde  $N_s$  denota la densidad de la  $s$ -ésima especie neutra,  $H_s$  es un término de escala y  $h$  es la altura. Luego, podemos expresar la densidad de electrones en función de los términos de escala para  $O$  y  $N_2$ . Teniendo en cuenta que  $m_{N_2} : m_O = 1.75 : 1$ ,

$$N_e \propto \exp\left[-h\left(\frac{1}{H_O} - \frac{1}{H_{N_2}}\right)\right] = \exp\left[-\frac{h}{H_O}\left(1 - \frac{H_O}{H_{N_2}}\right)\right] = \exp\left[\frac{0.75h}{H_O}\right] \quad (2.8)$$

A partir de ésta expresión podemos ver que la densidad de electrones de la capa F2 aumenta debido a que la tasa pérdida decae más rápido que la tasa de producción.

Es necesario comentar que a pesar que estamos utilizando  $H$  para el factor de escala de la

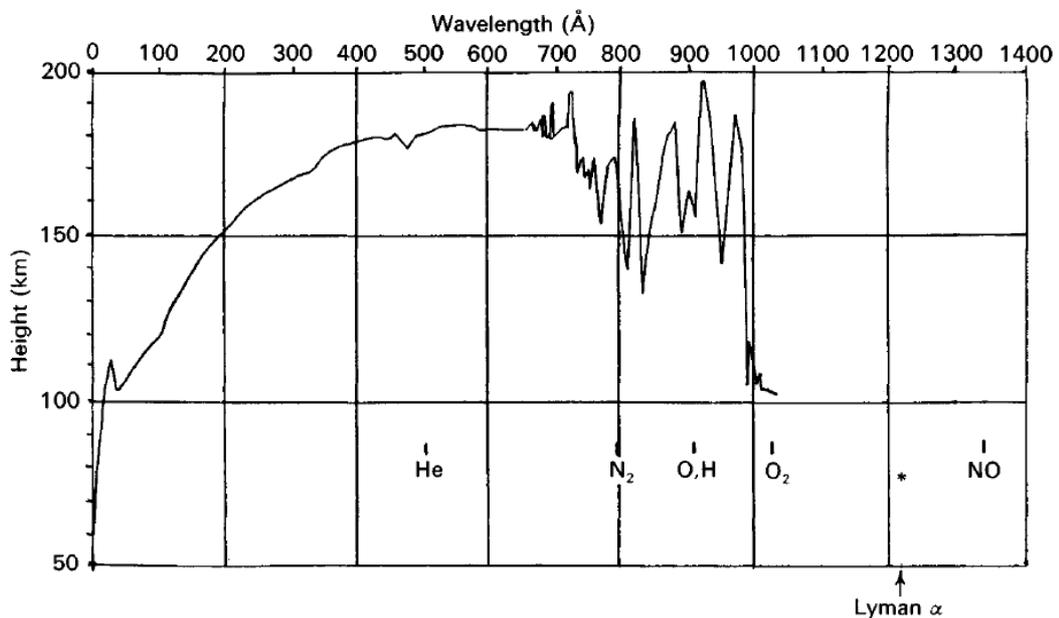
altura, éste es solo un valor aproximado de la función

$$\delta = \left( -\frac{1}{N} \frac{dN}{dh} \right)^{-1} \quad (2.9)$$

que se conoce como distribución de altura.

### 2.1.2) La densidad máxima de electrones y el parámetro $h_m F_2$

Vemos que la expresión anterior muestra una clara inconsistencia con la realidad, ya que al parecer la densidad de electrones crece indefinidamente. De esto podemos concluir que la hipótesis de que el equilibrio en la ecuación de continuidad se puede alcanzar únicamente con las funciones de producción y pérdida, estaba equivocada.



**Figura 2.3** Puntos en los que la profundidad óptica es igual a la unidad (absorción es máxima) (Hargreaves, 1995).

Para incluir los efectos de transporte, asumimos que sólo éstos son los que influyen en la ecuación de continuidad. Por otro lado, bastaría trabajar solo con la componente vertical, entonces tendríamos que:

$$\frac{dN}{dt} = \nabla \cdot (N \mathbf{v}) = -\frac{\partial(Nw)}{\partial h} \quad (2.10)$$

en donde  $w$  representa la velocidad vertical de deriva de las partículas que se difunden. La velocidad de deriva puede determinarse utilizando la ecuación (1) que determina la dinámica de las partículas. En este caso, nos interesa la densidad de partículas cargadas, por lo que se tienen que analizar las ecuaciones dinámicas para los iones y los electrones. Ya que la

movilidad de los iones es mucho menor que la de los electrones, estas partículas se distanciarán, creando campos eléctricos que también van a influir en la ley de movimiento.

Podemos incluir todas las fuerzas involucradas y asumir que para esta aproximación se cumple la ley de gas ideal (Chen, 1984) y que  $N_e=N_i=N$  y que  $w_i=w_e=w$ :

$$\begin{aligned} -\frac{dp_e}{dh} &= N m_e g + N E e^- + N m_e \nu_e w = -k T_e \frac{dN}{dh} \\ -\frac{dp_i}{dh} &= N m_i g - N E e^- + N m_i \nu_i w = -k T_i \frac{dN}{dh} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aquí  $p$  es la presión,  $\nu$  la frecuencia de colisión,  $E$  el campo eléctrico y  $g$  la gravedad. Si sumamos ambas expresiones y asumimos que  $m_i \gg m_e$ ,  $m_e \nu_e \ll m_i \nu_i$ ,

$$N m_i g + N m_i \nu_i w = -k (T_e + T_i) \frac{dN}{dh}, \Rightarrow N w = -D_p \left( \frac{dN}{dh} + \frac{N}{H_p} \right) \quad (2.12)$$

siendo las constantes:

$$\begin{aligned} D_p &= k \frac{(T_e + T_i)}{m_i \nu_i}, \\ H_p &= k \frac{(T_e + T_i)}{m_i} g \end{aligned} \quad (2.13)$$

la difusión ambipolar y la escala de la altura del plasma respectivamente. En combinación con la ecuación de continuidad (2.10) tenemos:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial h} \left[ D_p \left( \frac{dN}{dh} + \frac{N}{H_p} \right) \right] \quad (2.14)$$

Si tomamos la difusión como una constante vemos que en equilibrio, la solución estaría dada por:

$$N = N_o \exp \left[ -\frac{h}{H_p} \right] \quad (2.15)$$

Sin embargo, dado que la colisión de iones con neutros es proporcional a la densidad de neutros, podemos decir que (Gombosi, 2004):

$$\nu_i = \nu_o \exp \left[ -\frac{h}{H_s} \right] \quad (2.16)$$

Luego, en (2.13):

$$D_p = k \frac{(T_e + T_i)}{m_i \nu_i} = k \frac{(T_e + T_i)}{m_i \nu_o} \exp \left[ \frac{h}{H_s} \right] = D_o \exp \left[ \frac{h}{H_s} \right] \quad (2.17)$$

Aquí se puede ver claramente que el valor de la difusión aumenta con la altura. De manera que la fórmula para la densidad de electrones tiene que ser recalculada para el equilibrio, cuando la difusión varía con la altura, en éste caso la distribución de altura no siempre está

representado por el mismo factor de escala de altura. Luego, usando

$$N = N_o \exp\left[-\frac{h}{\delta}\right] \quad (2.18)$$

y asumiendo que la difusión está en función de la altura, podemos desarrollar de nuevo la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{\partial}{\partial h} \left[ D_p \left( \frac{dN}{dh} + \frac{N}{H_p} \right) \right] \\ &= \frac{dD_p}{dh} \left( \frac{dN}{dh} + \frac{N}{H_p} \right) + D_p \left( \frac{d^2 N}{dh^2} + \frac{1}{H_p} \frac{dN}{dh} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Al reemplazar las funciones halladas para  $N$  y  $D_p$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{D_p}{H_s} \left( -\frac{N}{\delta} + \frac{N}{H_p} \right) + D_p \left( \frac{N}{\delta^2} - \frac{1}{H_p} \frac{N}{\delta} \right) \\ &= D_p N \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{H_p} \right) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{H_s} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Los términos de pérdida por recombinación y de transporte en la función de continuidad contribuyen a disminuir la densidad de electrones. Los dos procesos tienen un comportamiento exponencial aunque la componente de pérdida es representada por una exponencial negativa, mientras que la de transporte por una positiva. Teniendo en cuenta que las dos funciones tienen una tasa de variación similar, podemos asumir que el mínimo se encontrará cuando las dos contribuciones sean similares (Rishbeth, 1967; Schunk, 2009).

Para decidir a qué altura éstos dos procesos son igualmente importantes, podemos evaluar el tiempo característico para la pérdida de electrones, siendo el más corto el que domine el proceso.

Para la recombinación tenemos que:

$$\frac{dN_e}{dt} = -\beta N_e = -\frac{N_e}{\tau_\beta} \quad (2.21)$$

Luego, el tiempo característico de la recombinación es:

$$\tau_\beta = \frac{1}{\beta} \quad (2.22)$$

Para la difusión:

$$\frac{dN_e}{dt} = D_p N_e \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{H_p} \right) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{H_s} \right) = \frac{-N_e}{\tau_D}, \quad (2.23)$$

donde,

$$\tau_D = \left[ -D_p \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{H_p} \right) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{H_s} \right) \right]^{-1} \quad (2.24)$$

Aunque  $\delta$  cambia continuamente, podemos dar un estimado del tiempo característico. Vemos que para valores extremos de  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \tau_D &= \frac{H_s H_p}{D_p}, & \text{si } \delta \gg H_s, H_p \\ \tau_D &= \frac{\delta^2}{D_p}, & \text{si } \delta \ll H_s, H_p \end{aligned} \quad (2.25)$$

Es claro que para en los dos casos, el tiempo característico es proporcional al cuadrado de la escala de altura. Luego, si  $H$  es una escala de altura típica en F2:

$$\tau_D \approx \frac{H^2}{D_p} \quad (2.26)$$

Ahora, vemos que los tiempos serán similares si se cumple que  $\tau_D \approx \tau_\beta$ :

$$\beta \approx \frac{D_p}{H^2} \quad (2.27)$$

Por último, la densidad máxima de electrones se encuentra en la altura en donde el coeficiente de acoplamiento tenga el valor anterior:

$$N_e^{max} \approx \frac{P}{\beta} \approx \frac{PH^2}{D_p} \quad (2.28)$$

Sin embargo, existen otros fenómenos que pueden alterar el valor de altura de la densidad máxima de electrones. Uno de ellos, que será de gran importancia en el cálculo de tendencias de  $h_m F2$ , es el de las derivas verticales causadas por los vientos en la termósfera. Estas velocidades modifican las velocidades de difusión de las partículas en la ionósfera, lo que finalmente altera la distribución de electrones.

Si  $U$  es el viento meridional neutro termosférico,  $\alpha$  es el ángulo que hace el vector de campo geomagnético con el norte e  $I$  el que hace con el plano horizontal local, podemos expresar la velocidad de deriva vertical  $W$  como:

$$W = U \cos(\alpha) \sin(I) \cos(I) \quad (2.29)$$

Es claro que a pesar de que los vientos neutros actúen sobre las partículas cargadas, éstas estarán limitadas a moverse principalmente alrededor de las líneas de campo magnético: hacia arriba durante la noche y hacia abajo durante el día.

En presencia del viento vertical  $W$ , la altura de la densidad máxima se vería afectada en (Rishbeth y Garriot, 1969; Elias 2009):

$$\Delta z_m \equiv \frac{\Delta h_m F2}{H} \approx \frac{H \Delta W}{D_p} \quad (2.30)$$

Por otro lado, de (2.15) podemos calcular un estimado de la tasa de variación de  $N_m F2$ :

$$N_m F2 \approx \frac{q_m}{\beta_m} \propto \frac{[O]}{[N_2]} \propto \frac{e^{-z_m}}{e^{-1.75 z_m}} \propto e^{0.75 z_m} \Rightarrow \frac{d N_m F2}{d z_m} \propto 0.75 e^{0.75 z_m} \quad (2.31)$$

Luego, de (2.30) y (2.31) vemos que:

$$\frac{\Delta N_m F2}{N_m F2} \propto 0.75 \frac{H \Delta W}{D} \quad (2.32)$$

Además, de la relación (2.39) podemos calcular la variación correspondiente en  $f_o F2$ :

$$N_m F2 \propto f_o F2^2 \Rightarrow \frac{\Delta N_m F2}{N_m F2} \propto \frac{\Delta f_o F2}{2 f_o F2} \quad (2.33)$$

Vemos entonces que la variación a largo plazo en  $h_m F2$ ,  $f_o F2$  y  $N_m F2$  causada por vientos termósfericos, se deberá principalmente a la forma en la que el campo geomagnético cambia sobre cierta región, debido a las componentes  $I$  y  $\alpha$  en (2.29).

## 2.2) SONDEOS VERTICALES Y PROPAGACIÓN DE ONDAS EN LA IONÓSFERA

La ionósfera es un medio ionizado dispersivo, inhomogéneo, anisotrópico y disipativo en diferente medida de acuerdo a la frecuencia de las ondas electromagnéticas que viajen a través de ella.

Para crear las series de tiempo de  $h_m F2$ ,  $f_o F2$  y  $N_m F2$ , se construye un perfil de la densidad electrónica enviando ondas electromagnéticas para que reflejen a diferentes alturas. Durante su viaje, la velocidad de propagación de éstas señales se ve afectada de acuerdo a la relación entre su frecuencia y la frecuencia del plasma. Midiendo los tiempos de vuelo se construye una función de frecuencias versus tiempo, llamada “ionograma”. El sistema que se utiliza para realizar éstas mediciones se llama ionosonda.

En esta sección se va a exponer brevemente la física necesaria para entender este proceso de medición.

### 2.2.1) Ondas TEM en la ionósfera

Asumiendo que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell para una onda TEM tienen estructura armónica, podemos aplicar la transformada de Fourier a la ley de Ampere para trabajar con las amplitudes, frecuencia  $\omega$  y vector de onda  $\mathbf{k}$ :

$$-j\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon_o \chi \mathbf{E} = j\omega \epsilon n^2 \mathbf{E} \quad (2.34)$$

donde,

$$n = \sqrt{1 + \chi + \frac{\sigma}{j\omega \epsilon_o}} \quad (2.35)$$

En el caso de la ionósfera  $\chi$  (susceptibilidad eléctrica) está relacionada a las partículas neutras de la atmósfera y  $\sigma$  (conductividad del medio) con los iones y electrones. A pesar que la densidad de partículas neutras es mucho mayor que la de las partículas cargadas, el efecto sobre la propagación de las ondas suele ser (en la capa D se produce la mayor absorción) muy pequeño. Incluso para alturas bajas, en donde no existe una cantidad significativa de partículas cargadas,  $\chi$  suele tomarse como 0. Luego, tenemos que el índice de refracción se puede expresar:

$$n = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \epsilon_o}} \quad (2.36)$$

La conductividad puede ser modelada de diversas maneras. Como primera aproximación se utilizará el modelo de “plasma frío” que asume que las cargas no tienen distribución de temperatura y que los electrones oscilan libremente alrededor de los iones inmóviles (Kudeki, 2004). Resolviendo la ecuación de un oscilador armónico, tenemos que:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m_e \omega_e^2} \mathbf{E}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = j\omega_e \mathbf{r} = \frac{je}{m_e \omega_e} \mathbf{E} \quad (2.37)$$

donde  $m_e$  es la masa del electron, y  $\omega_e$  la frecuencia de oscilación alrededor de los iones, o frecuencia de plasma. Usando la ley de Ohm para despejar la conductividad y con  $N$  para la densidad de electrones:

$$\mathbf{J} \equiv -Ne\mathbf{v} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \sigma = \frac{Ne^2}{jm_e \omega_e} \quad (2.38)$$

De ésta manera tenemos que el índice de refracción depende de la frecuencia de propagación de la onda así como de la oscilación de los electrones en la ionósfera:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad \text{donde } \omega_p \equiv \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_o m_e}} \quad (2.39)$$

La propagación es posible para el caso en el que  $\omega > \omega_p$ . Si  $\omega < \omega_p$ ,  $n$  es imaginario, lo que implica que la onda será reflejada mientras que la amplitud del campo que ingresa en el medio ionizado decaerá exponencialmente. Por último, en el caso de que  $\omega = \omega_p$ , la

componente del campo magnético será 0, por lo que el campo eléctrico estará siempre en la dirección de propagación, dando lugar a ondas longitudinales. Al depender de la densidad electrónica,  $\omega_p$  va a estar en función de la altura. Tenemos entonces que la relación de dispersión se puede escribir:

$$k = \frac{\omega n}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (2.40)$$

En general, podemos considerar la señal utilizada para sondear la ionósfera como un paquete de ondas, luego, la velocidad de propagación de ésta señal estará dada por la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} \quad (2.41)$$

De ésta forma queda explícita la relación entre la velocidad de propagación de la señal de sondeo y las propiedades del medio.

Para el caso de la ionósfera terrestre (asumiendo que se encuentra discretamente estratificada), dado que la densidad de electrones crece exponencialmente hasta  $h_m F2$ , vemos que al enviar señales con frecuencias cada vez mayores, podremos penetrar más alto en la ionósfera. Primero la onda será reflejada ( $\omega < \omega_p$ ), luego al aumentar la frecuencia ( $\omega = \omega_p$ ) veremos que en un punto se generan ondas longitudinales y no hay reflexión y por último ( $\omega > \omega_p$ ) la onda logra pasar la interface y se propaga a través del medio con una frecuencia de plasma mayor, aunque en esta región la velocidad de grupo será diferente a la anterior (Jackson, 1999).

Para modelar el comportamiento de la onda que se utiliza para sondear la ionósfera, es necesario estudiar las leyes que rigen su propagación. Si asumimos que la solución tiene la forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re \{ \hat{y} E(z) e^{j\omega t} \} \quad (2.42)$$

tendremos que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon_0 n^2(z) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Aplicando el operador rotacional a la segunda expresión de (2.43) tendremos que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} \quad (2.44)$$

Usando la identidad del triple producto vectorial y la ecuación de Ampere, tendremos la

siguiente ecuación para la amplitud del campo eléctrico:

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k_o^2 n^2(z) E(z) = 0, \text{ donde } k_o = \frac{\omega}{c} \quad (2.45)$$

Ésta ecuación puede resolverse utilizando el método WKB. Si asumimos una solución de la forma:

$$E(z) = E_o \exp[-jk_o S(z)] \quad (2.46)$$

la solución será:

$$E(z) = \frac{E_o}{\sqrt{n(z)}} \exp[\pm jk_o \int_0^z dz' n(z')] \quad (2.47)$$

Si la onda es reflejada a una altura  $z_r$ , la amplitud del campo estará compuesta por la suma de dos soluciones: la transmitida y la reflejada:

$$RE(z) = \exp[j\varphi_r] E(z) \quad (2.48)$$

Podemos expresar la amplitud total como:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{E_o}{\sqrt{n(z)}} \left( e^{-jk_o \int_0^z dz' n(z')} + e^{j\varphi_r} e^{+jk_o \int_0^z dz' n(z')} \right) \\ &= \frac{2E_o e^{j\varphi_r/2}}{\sqrt{n(z)}} \cos \left( k_o \int_0^z dz' n(z') + \frac{\varphi_r}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Naturalmente, el desfase va a depender del coeficiente de reflexión para en el interface de cambio de frecuencia de plasma, a una altura  $z_r$ . Ésta solución será aceptable mientras se cumpla la siguiente condición:

$$k_o n^2(z) \gg |n'(z)| \quad (2.50)$$

Ésta condición impone una restricción bastante fuerte al índice de refracción, en particular vemos que la solución hallada no sería válida cerca a la interfase  $z=z_r$ , ya que  $n(z_r)=0$ .

Sin embargo, podemos resolver la ecuación diferencial sin hacer ninguna suposición acerca de la forma de la solución, en vez de eso podemos limitarnos a resolverla para puntos cercanos al interfaz, y modelar el índice de refracción en ésta región.

Asumiendo un perfil parabólico para el índice, tenemos que la solución para  $z < z_r$  estará en expresada con funciones de Airy  $Ai$  y  $Bi$ :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon) &= K_1 Ai(\varepsilon) + K_2 Bi(\varepsilon), \\ \text{con } \varepsilon &= \left( \frac{k_o^2}{L} \right)^{1/3} (z - z_r) \text{ y } n^2(z) = \frac{z_r - z}{L} \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde  $L$  es una constante positiva. Si vemos que  $\varepsilon$  siempre será negativo, luego, si  $\varepsilon < -1$  la

función de Airy puede aproximarse a:

$$Ai(\varepsilon) \approx \frac{|\varepsilon|^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3}|\varepsilon^{3/2}| - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.52)$$

Juntando (2.52) con la obtenida con el método WKB, se tiene que:

$$\varphi_r = \frac{\pi}{2} - 2k_o \int_0^{z_r} dz' n(z') \quad (2.53)$$

de manera que el coeficiente de reflexión:

$$R \equiv \exp[j\varphi_r] = j \exp[-j2k_o \int_0^{z_r} n(z') dz'] \quad (2.54)$$

Éste coeficiente indica la atenuación sobre la amplitud en el espacio de frecuencias.

### 2.2.2) Cálculo de ionogramas

Podemos expresar la señal utilizada para sondear la ionósfera de la siguiente manera:

$$f(t) \cos(\omega_o t) = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega - \omega_o) e^{j\omega t} + c.c \quad (2.55)$$

Donde  $f(t)$  denota la señal enviada mientras que el  $\cos(\omega_o t)$  hace referencia al “carrier”. Dado que  $F(\omega - \omega_o)$  indica las componentes en el espacio de frecuencias de la señal enviada, podemos usar la expresion hallada para el coeficiente de reflexión. Si  $p(t)$  es la señal total reflejada a una altura  $z_r$ :

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega - \omega_o) R_t(\omega) e^{j\omega t} + c.c \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega - \omega_o) \exp\left[j\left(\omega t - 2\frac{\omega}{c} \int_0^{z_r(\omega)} n(z) dz\right)\right] + c.c \end{aligned} \quad (2.56)$$

Expandiendo el argumento de la función exponencial al primer orden en la serie de Taylor alrededor de  $\omega_o$ :

$$\omega t - 2\frac{\omega}{c} \int_0^{z_r(\omega)} n(z) dz \approx \omega_o t - 2\frac{\omega_o}{c} \int_0^{z_r(\omega_o)} n(z) dz + t - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \int_0^{z_r(\omega)} \omega n(z) dz \right]_{\omega=\omega_o} \quad (2.57)$$

y dado que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \int_0^{z_r(\omega)} \omega n(z) dz \right] &= \frac{\partial z_r(\omega)}{\partial \omega} \omega n(z_r) + \int_0^{z_r} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega n(z)] dz \\ &= \int_0^{z_r} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega n(z)] dz \end{aligned} \quad (2.58)$$

ya que por definición  $n(z_r) = 0$ , el pulso reflejado puede escribirse como:

$$\begin{aligned} p(t) &\approx \frac{1}{2} j \exp\left[j\omega_o \left(t - \frac{2}{c} \int_0^{z_r(\omega_o)} n(z) dz\right)\right] \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega - \omega_o) \dots \\ &\exp\left[j\left(t - \frac{2}{c} \int_0^{z_r} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega n(z)] dz\right)\right]_{\omega=\omega_o} (\omega - \omega_o) + c.c \end{aligned} \quad (2.59)$$

Podemos entonces expresar la señal reflejada  $p(t)$  en función de la señal transmitida:

$$p(t) \approx -\sin(\omega_0 t - 2k_0 S_\varphi(\omega_0)) f\left(t - \frac{2S_g(\omega_0)}{c}\right) \quad (2.60)$$

con:

$$\begin{aligned} S_\varphi(\omega_0) &\equiv \int_0^{z_r(\omega_0)} n(z) dz \\ S_g(\omega_0) &\equiv \int_0^{z_r(\omega_0)} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega n(z)] dz \end{aligned} \quad (2.61)$$

Utilizando la expresión hallada para el índice de refracción:

$$S_g(\omega_0) \equiv \int_0^{z_r(\omega_0)} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right] dz = \int_0^{z_r(\omega_0)} \frac{dz}{n(z)} \quad (2.62)$$

Vemos de manera explícita que la señal reflejada se puede expresar en función de la señal enviada con un retraso temporal dado por  $\tau(\omega_0)$ :

$$\tau(\omega_0) = \frac{2S_g(\omega_0)}{c} \quad (2.63)$$

Esto puede interpretarse de la siguiente manera: al enviar una señal con frecuencia  $\omega_0$  hacia la ionósfera, ésta va a ser reflejada a una altura  $z_r(\omega_0)$  y será detectada de nuevo, luego de  $\tau(\omega_0)$  segundos. El tiempo de retraso estará en función del índice de refracción ya que, éste afectará la velocidad de grupo de la señal utilizada. De ésta manera, podemos interpretar a  $S_g$  como la altura que hubiera alcanzado una onda propagándose a la velocidad de la luz por un tiempo  $\tau$ .

Por último, podemos definir una función que por cada frecuencia, estime  $S_g$  para diferentes frecuencias. Ésta función es muy conocida en el ámbito de estudio de la ionósfera y se conoce como “ionograma”:

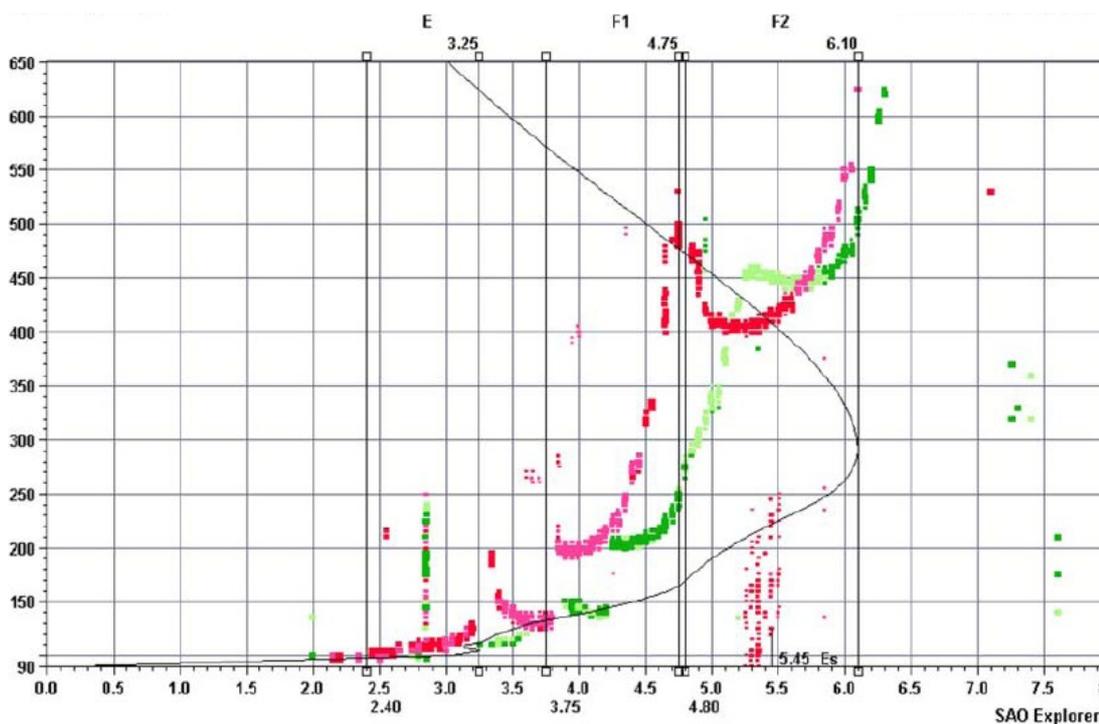
$$h(f) \equiv \int_0^{z_r} \frac{dz}{\sqrt{1 - f_p^2(z)/f^2}} \quad (2.64)$$

De aquí podemos ver que  $f$  se acerca a  $f_p$  de manera asintótica por la izquierda. Este función puede construirse de manera empírica con la ayuda de la ionosonda. Éste sistema emite señales a diferentes frecuencias (por lo general las mediciones son mas significativas en el rango de 1 a 9 MHz) y mide el tiempo  $\tau$  para luego convertirlo a la altura virtual correspondiente.

El objetivo de esta medición suele ser el de poder invertir los valores de  $f_p$  para luego construir el perfil de densidad electrónica. En la Figura 2.4 (McNamara, 2008) se puede

apreciar un ionograma medido con el mismo sistema que el del ROJ, aunque de versión más antigua.

En éste ionograma se pueden apreciar las alturas virtuales generadas por la componente ordinaria (color rojo) y extraordinaria (color verde) de la onda de sondeo. Si bien la componente extraordinaria se utiliza para la inversión del perfil de densidad, la más importante es la componente ordinaria, ya que el índice de refracción asociado a esta componente es el calculado anteriormente (para el caso más general de un magnetoplasma, es necesario utilizar la ecuación de Appleton-Hartree).



**Figura 2.4** Ionograma medido en Madimbo a las 10:59 UT el día 04/09/2004, por la versión v3.4.02b del SAO Explorer, distribuido por el “Center of Atmospheric Research”, University of Massachusetts Lowell.

### 2.3) Modelos Numéricos

Los resultados del modelo de Roble motivaron el estudio del impacto del calentamiento global en la alta atmósfera. Éstos sugerían un enfriamiento de 50 K en la termosfera para el caso en el la concentración de  $\text{CO}_2$  se duplicara. Con este resultado, Rishbeth estimó una disminución de aproximadamente 17 km para  $h_m\text{F2}$  debido a una contracción por enfriamiento.

Sin embargo, las diferentes estaciones medían diferentes magnitudes en la tendencia de  $h_m\text{F2}$ ,

en algunas inclusive se obtenían variaciones positivas. Fue entre el año 2008 y 2009 que Qian logró comprobar la influencia de diferentes factores locales sobre las medidas de  $h_m F_2$  a través un modelo global basado en el de Roble pero incluyendo varios procesos locales. De esta manera Qian pudo construir, bajo ciertos supuestos, distribuciones globales de las tendencias de  $h_m F_2$ .

### 2.3.1) Los modelos de Roble y Rishbeth

El estudio del impacto de los gases de efecto invernadero, en especial del  $CO_2$ , en la alta atmósfera se viene realizando desde la década de los 80.

A éstas alturas, el balance energético depende de la energía entrante a través de la radiación UV del sol, y de la pérdida mediante enfriamiento radiativo en IR. En estas capas (por encima de la tropopausa) la atmósfera es transparente al infrarrojo, de modo que un aumento en la concentración de emisores en esta longitud de onda, contribuye con el enfriamiento general.

Fels (1980) fue el primero en utilizar un modelo global de circulación para calcular el impacto que tendría el aumento de  $CO_2$  en el proceso de enfriamiento radiativo, obteniendo una disminución de 10 K a 50 km de altura y de 0 K en la tropopausa. Luego Roble (1989) utilizó el modelo desarrollado por Brasseur y Hitchman (1988) para la estratósfera y mesósfera baja (de 20 a 60 km), y el de Roble y Dickinson (1987) para estudiar los efectos del aumento de  $CO_2$  y  $CH_4$  en la termósfera.

El de Roble y Dickinson (1987) es un modelo autoconsistente que puede modelar la composición no solo los constituyentes principales ( $O$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ) mediante ecuaciones de difusión, sino también varios constituyentes menores ( $N(^4S)$ ,  $NO$ ,  $H_2O$ ,  $H$ ,  $H_2$ ,  $CH_4$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ ) que se encuentran en equilibrio fotoquímico con  $O_3$ ,  $O(^1D)$ ,  $N(^2D)$ ,  $NO_2$ ,  $OH$ ,  $H_2O_2$  y  $HO_2$ . Además, calcula las concentraciones de los principales iones de la capa E y F de la ionósfera:  $O^+$ ,  $O_2^+$ ,  $N_2^+$ ,  $NO^+$  y  $N^+$ . Se utiliza un modelo especial para la química de la region D, que calcula la composición de varios iones positivos y negativos. Para el balance de energía, el modelo cuenta con ecuaciones termodinámicas específicas para las temperaturas de iones, electrones y neutros. El gas neutro recibe energía de: fotoelectrones solares (absorción en las bandas de Schumann-Runge por parte del  $O_2$  y en la de Hartley y Huggins para el  $O_3$ ); procesos exotérmicos de reacciones ion-neutro, neutro-neutro y precipitaciones de electrones en las auroras boreales; y disipación de Joule a través de las corrientes ionosféricas. El proceso de enfriamiento por emisión radiativa incluye:  $CO_2$ - $15\mu m$ ,  $NO$ - $5.3\mu m$  y  $O$ - $63\mu m$ . Además se utiliza un modelo especial desarrollado por Dickinson (1984)

para la radiación del CO<sub>2</sub>. Para el perfil de radiación solar, se utilizaron las medidas de Torr (1985) para el EUV y las de Rottman (1981) para el UV.

Este modelo global, en lugar de utilizar uno empírico, calcula los perfiles de concentración y temperatura de manera autoconsistente a partir de condiciones en la base (60 km de altura) y de especificaciones sobre las fuentes externas (tasas de calentamiento por disipación de Joule, radiación solar y precipitación de partículas de las auroras boreales) y de condiciones iniciales arbitrarias para las demás variables hasta llegar a un estado de equilibrio. Sin embargo, se necesita el perfil de coeficientes de turbulencia de difusión de calor y densidad. Este perfil se obtiene ajustando los valores calculados con el modelo, con los promedios globales del “U.S Standard Atmosphere 1976” para los valores de la mesósfera y con el MSIS-86 (Hedin, 1987) para la termósfera.

Se asumió el doble del valor de las concentraciones de CO<sub>2</sub> y CH<sub>4</sub> (330 ppm y 0.01 ppm respectivamente) que se tenían en esa época para una altura de 60 km. Podemos ver en la Figura 2.5 los resultados obtenidos para la temperatura. Vemos que para el rango de 300 a 400 km, se produce un enfriamiento de alrededor de 50 K.

Para modelar la termósfera se asume que el perfil vertical de composición está determinado por el balance entre conducción molecular y transmisión radiativa del calor. El transporte horizontal de calor y las variaciones diurnas pueden ser despreciadas. Además, se asume que la composición solo depende de la presión, por lo que en caso de contracción el perfil de densidad también debería contraerse para conservar la correspondencia. Con estos supuestos (Akmaev 1998, 2002) se puede demostrar que la temperatura en la termósfera será monótonicamente creciente, y que estará determinada principalmente por las condiciones de frontera en la base, de manera que si  $x_b$  es la altura base y  $T_1(x_b)$  es la temperatura a esta altura, se debe cumplir que  $T_1(x_b) > T_2(x_b)$  implica que  $T_1(x) > T_2(x)$  para  $x > x_b$ .

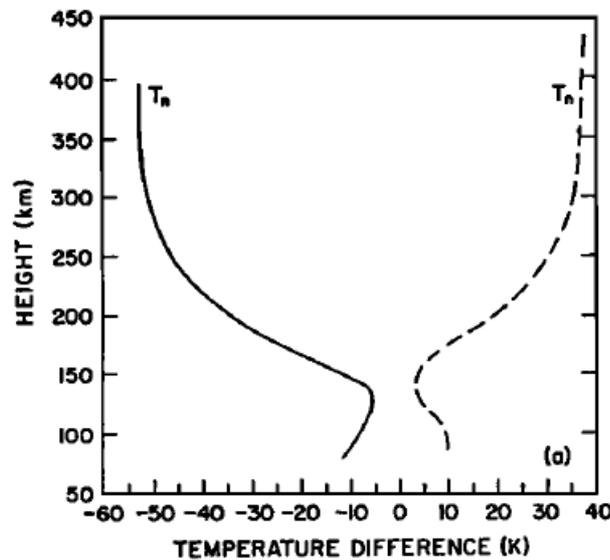
Un año mas tarde, Rishbeth (1990), estimó una contracción de alrededor de 15 km basándose en las conclusiones de Roble. Para realizar éste cálculo, asumió que la termósfera puede modelarse como un gas ideal de manera que:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{p} + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{dT}{p} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T} \quad (2.65)$$

Por otro lado, considerando la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dp}{dh} = -nmg \Rightarrow \frac{dp}{p} = dh \left( \frac{mg}{kT} \right) = -\frac{dh}{H} \quad (2.66)$$

Integrando, podemos relacionar las variaciones de altura para diferencias en densidad y temperatura:



**Figura 2.5** Las líneas continua y punteada muestran la diferencia de utilizar el doble y la mitad de la concentración presente de CO<sub>2</sub> respectivamente (Roble, 1989).

$$\frac{\Delta h}{H} = \Delta \ln(n) + \Delta \ln(T) \quad (2.67)$$

Donde  $\Delta h$  indica el valor de contracción o la altura que  $h_m F2$  disminuiría. Usando los valores de  $n$ ,  $H$  y  $T$  del MSIS-86 y las estimaciones de Roble para la densidad y la temperatura, Rishbeth estimó una contracción de alrededor de 17 km (para el caso de  $h_m F2=255$  km).

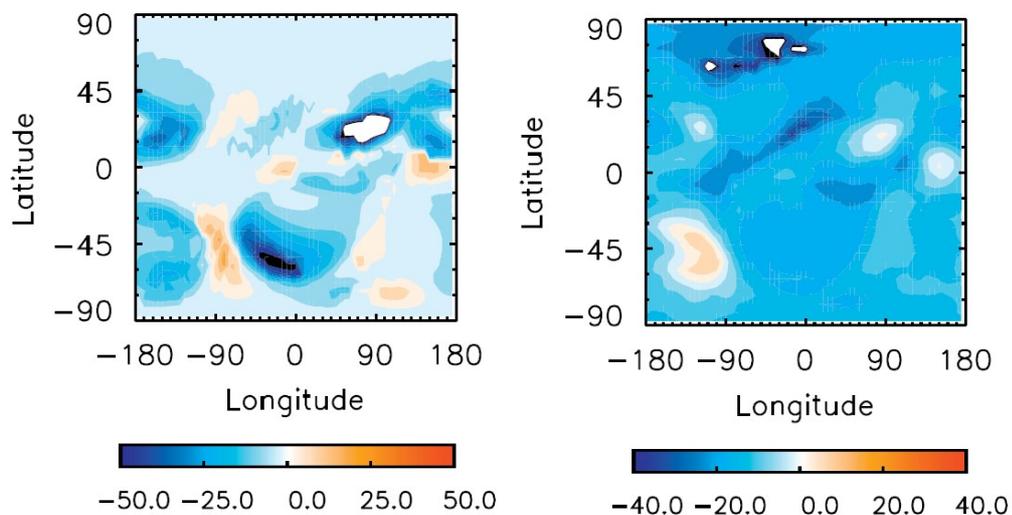
Estos valores fueron reproducidos por Roble y Rishbeth (1992) con el modelo NCAR-TIGCM (1987) con algunas modificaciones (un modelo aeronómico autoconsistente y un modelo euleriano de interacción con la ionósfera). Con este nuevo modelo, lograron calcular una distribución de variaciones de  $h_m F2$  en todo el planeta. Obtuvieron valores de enfriamiento de entre 20 a 40 K para alturas de entre 200 a 300 km, una contracción de alrededor de 15 km para  $h_m F2$  y una disminución de la densidad neutra de hasta el 40% para alturas de 100 a 200 km.

A pesar que la caída de los valores de densidad ha podido ser comprobada por mediciones de fricción con la atmósfera neutra con los satélites (Keating, 2000; Emmert et al., 2011), aun no se podía explicar del todo la razón por la cual las variaciones de  $h_m F2$  eran tan diferentes para distintas locaciones, incluso llegando a ser positivas en algunos casos.

### 2.3.2) El modelo de Qian

Con el objetivo de estudiar la distribución global de las pendientes de las series de tiempo de  $h_mF2$ , Qian (2009) utilizó el modelo NCAR-TIGCM para estudiar la dependencia de las tendencias en  $h_mF2$  y  $N_mF2$  con factores locales como el coeficiente de difusión de plasma o la tasa de concentraciones  $[O]/[N_2]$ .

Luego de analizar el impacto del transporte de plasma causado por los vientos neutros, la difusión ambipolar y el drift  $E \times B$ , encontró que existe una dependencia fuerte entre  $h_mF2$  y el coeficiente de difusión de plasma por vientos neutros (Figura 2.6).



**Figura 2.6** A la derecha se presenta un grafico de las variaciones de  $h_mF2$ , mientras que a la izquierda uno del coeficiente de difusión de vientos neutros (Qian, 2009).

La figura anterior representa las variaciones de  $h_mF2$  durante un mínimo solar. Vemos que existe una zona con variaciones positivas en  $h_mF2$ .

Qian además identificó una correlación entre las variaciones de  $h_mF2$  y  $N_mF2$  con el ecuador magnético, lo que sugiere una influencia de la electrodinámica terrestre en las tendencias obtenidas.

Los temas tratados en este capítulo han servido para entender el contexto físico de donde se extraen los parámetros que se desean analizar. Además, se han resumido los estudios que dieron origen a esta área y las simulaciones numéricas que pretenden dar luz de la compleja dinámica que determina la evolución de estos parámetros. En el siguiente capítulo se desarrollarán las herramientas estadísticas necesarias para el análisis de las tendencias a largo plazo que planteamos en este trabajo.

### 3 MODELOS AR(p) Y CÁLCULO DE TENDENCIAS

El estudio de tendencias, requiere un buen entendimiento de los modelos estadísticos que se emplean. En nuestro caso, para estudiar las tendencias en  $h_m F_2$ ,  $N_m F_2$  y  $f_o F_2$  vamos a utilizar algunos modelos y herramientas que se utilizan en el análisis de series de tiempo.

Una serie de tiempo es un concepto muy general, se puede entender como la realización de un proceso aleatorio o estocástico. Este trabajo se basará en la idea de que una serie de tiempo en la que los valores sucesivos sean dependientes entre ellos, puede ser generada por una serie de variables aleatorias independientes, por lo general de distribución normal (Yule, 1927).

Este supuesto da origen al llamado “modelo de filtro lineal”, que asume que los valores  $z_t$  de la serie de tiempo, pueden ser generados por una constante  $\mu$  más una serie de variables aleatorias normales independientes de media cero  $a_t$ , también llamada “ruido blanco”:

$$z_t = \mu + a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \dots \quad (3.1)$$

La operación efectuada por el “filtro lineal” consiste en tomar la suma ponderada de los valores de  $a_t$ , con coeficientes  $\Psi_j$ .

En éste capítulo se describirá lo que es un modelo lineal estacionario y un modelo autorregresivo. Se expondrá también lo más general acerca de los parámetros y funciones que los caracterizan. Por último, se calcularán las incertidumbres relacionadas a la estimación de tendencias por mínimos cuadrados cuando se asume un modelo autorregresivo de orden uno.

Este capítulo estará basado principalmente en los textos de Box (1994) y Shumway (2006).

#### 3.1) MODELOS ESTACIONARIOS Y LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Las series estacionarias consisten en procesos aleatorios en los que la probabilidad conjunta asociada a  $m$  realizaciones  $z_{t1}, \dots, z_{tm}$  es la misma a la asociada a otras  $m$  realizaciones  $z_{t1+k}, \dots, z_{tm+k}$  después de un tiempo  $k$ .

El supuesto de estacionariedad implica que la distribución de probabilidad conjunta para dos

eventos separados por un intervalo constante será la misma. De esto podemos concluir que la covarianza, y por lo tanto la función de autocorrelación, entre las serie de tiempo  $z_t$  y  $z_{t+k}$ , dependerá únicamente del desplazamiento  $k$ :

$$\gamma_k = \text{cov}[z_t, z_{t+k}] = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]$$

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]E[(z_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2} \quad (3.2)$$

Con:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (3.3)$$

Estas definiciones pueden representarse también en forma matricial si normalizamos la función de autocorrelación haciendo  $\rho_k/\rho_0$  y reemplazamos  $\rho_{-k} = \rho_k$  al reconocer la simetría respecto a  $k=0$ .

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix} = \sigma_z^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Que son respectivamente, las matrices de autocovarianza y autocorrelación. Consideremos una función lineal general de las variables  $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-n+1}$ :

$$M_t = \sum_{j=1}^n m_j z_{t+1-j} \quad (3.5)$$

Podemos calcular la varianza de (3.5) utilizando las siguientes propiedades:

$$\text{Var} \left[ \sum_j X_j \right] = \sum_{i,j} \text{Cov} [X_i, X_j]$$

$$\text{Cov} [aX, bY] = ab \text{Cov} [X, Y] \quad (3.6)$$

Luego:

$$\text{Var} [M_t] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_i m_j \gamma_{|j-i|} \quad (3.7)$$

Al ser la varianza siempre positiva, tenemos que la matriz  $\Gamma_n$  es “definida positiva”. Luego, el proceso será estacionario si la matriz de autocorrelación cumple con los criterios para ser una matriz “definida positiva”, es decir, que los menores principales de la matriz sean mayores que cero. Por ejemplo para el caso  $n=3$  en (3.4):

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad (3.8)$$

Por lo tanto, los valores de la autocorrelación para este caso deberán cumplir con las

siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} -1 < \rho_1 < 1 \\ -1 < \rho_2 < 1 \\ -1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2) MODELOS LINEALES Y AUTORREGRESIVOS

En esta sección se definirá lo que es un modelo lineal y uno autoregresivo, además se evaluarán los criterios de estacionariedad y se calcularán algunos parámetros importantes para caracterizar a estos modelos.

Como se vió anteriormente en (3.1), un proceso estocástico puede ser representado por los valores de salida de un filtro lineal, en donde el valor de entrada se compone de ruido blanco. Si el proceso es estacionario, podemos representar las desviaciones del proceso respecto a su media  $\mu$  o al origen con:

$$\tilde{z}_t = z_t - \mu = a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \dots = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j a_{t-j} \quad (3.10)$$

llamado modelo lineal estacionario, siempre que cumpla con:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\Psi_j| < \infty \quad (3.11)$$

que resume las condiciones de estacionariedad vistas en la sección anterior, es decir, se puede probar que con probabilidad igual a uno, el modelo converge y representa un proceso estacionario válido.

La secuencia de variables aleatorias independientes  $a_t$ , tiene media igual a cero y varianza constante.

$$E[a_t] = 0 \quad \text{var}[a_t] = \sigma_a^2 \quad (3.12)$$

Ya que las variables aleatorias  $a_t$  son independientes, la función de autocovarianza de la secuencia será:

$$\gamma_k = E[a_t a_{t+k}] = \begin{cases} \sigma_a^2, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Luego, la función de autocorrelación de una proceso estocástico descrito por ruido blanco, será simplemente

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

La forma del modelo lineal estacionario sugiere que existen coeficientes  $\pi_j$  tal que:

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{z}_{t-j} + a_t \quad (3.15)$$

Esta forma muestra más claramente cómo la desviación actual respecto a la media  $\mu$  es dependiente de las desviaciones pasadas.

Consideremos el caso especial en el que solo los primeros  $p$  coeficientes del modelo lineal estacionario serán diferentes de cero:

$$\tilde{z}_t = \varphi_1 \tilde{z}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \varphi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (3.16)$$

A este modelo se le conoce como autorregresivo de orden  $p$  o simplemente  $AR(p)$ . Para evaluar las condiciones de estacionariedad definimos el operador retraso

$$\hat{B} \tilde{z}_t = \tilde{z}_{t-1} \quad (3.17)$$

Podemos entonces expresar el proceso  $AR(p)$  de la siguiente manera:

$$(1 - \varphi_1 \hat{B} - \dots - \varphi_p \hat{B}^p) \tilde{z}_t = a_t \quad (3.18)$$

Para el caso  $p=1$  por ejemplo:

$$(1 - \varphi_1 \hat{B}) \tilde{z}_t = a_t \Rightarrow \tilde{z}_t = (1 - \varphi_1 \hat{B})^{-1} a_t \quad (3.19)$$

Expandiendo el operador en series de potencias, obtenemos la forma expresada en (3.1), y por lo tanto podemos aplicar el criterio de estacionariedad sobre los coeficientes de la serie:

$$(1 - \varphi_1 \hat{B})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \hat{B}^j \Rightarrow \tilde{z}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \hat{B}^j a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j a_{t-j} \quad (3.20)$$

Luego, el proceso con  $p=1$  será estacionario si se cumple que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_1^j| < \infty \Rightarrow |\varphi_1| < 1 \quad (3.21)$$

Para calcular la función de autocorrelación del caso general  $AR(p)$ , efectuamos primero la multiplicación:

$$\tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_t = \varphi_1 \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-2} + \dots + \varphi_p \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k} a_t \quad (3.22)$$

La función de autocovarianza para un desfase  $k$  estará dada por el valor esperado:

$$\gamma_k = E[\tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_t] = \varphi_1 E[\tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-1}] + \dots + \varphi_p E[\tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-p}] + E[\tilde{z}_{t-k} a_t] \quad (3.23)$$

Para  $k > 0$ , vemos que  $a_t$  será independiente respecto a  $z_{t-k}$ , y dado que  $E[a_t] = 0$ , tendremos que:

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p}, \quad k > 0 \quad (3.24)$$

De la definición de la función de autocorrelación en (3.2) sabemos que al dividir  $\gamma_k/\gamma_0$ :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0 \quad (3.25)$$

Sin embargo, para  $k=0$  el término que contiene a  $a_t$  no será igual a cero, ya que es dependiente con  $z_t$ . Para este caso:

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_{-1} + \varphi_2 \gamma_{-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{-p} + E[z_t a_t], \quad k > 0 \quad (3.26)$$

Pero:

$$E[z_t a_t] = \varphi_1 E[a_t \tilde{z}_{t-1}] + \varphi_2 E[a_t \tilde{z}_{t-2}] + \dots + E[\varphi_p a_t \tilde{z}_{t-p}] + E[a_t^2] \quad (3.27)$$

En esta expresión sólo queda el término que contiene a  $a_t^2$  ya que los demás contienen términos independientes y  $E[a_t] = 0$ . Entonces

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_{-1} + \varphi_2 \gamma_{-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{-p} + \sigma_a^2 \quad k > 0 \quad (3.28)$$

Reemplazando  $\gamma_k$  por  $\gamma_k$ , y dividiendo todo entre  $\gamma_0$  podremos obtener los valores de la función de autocorrelación. Además, utilizando la definición  $\gamma_0 = \sigma_z^2$ , podremos despejar la expresión para  $\sigma_z^2$ :

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \varphi_1 - \rho_2 \varphi_2 - \dots - \rho_p \varphi_p} \quad (3.29)$$

Que expresa la varianza de la serie de tiempo AR( $p$ ).

Con todas estas definiciones y conceptos para el caso general AR( $p$ ), podremos pasar fácilmente al caso que nos interesa, el proceso autorregresivo de orden uno ó AR(1):

$$\tilde{z}_t = \varphi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t \quad \text{ó} \quad z_t = \mu + \varphi_1 z_{t-1} + a_t \quad (3.30)$$

Con la condición de que  $-1 < \varphi_1 < 1$  para asegurar que el proceso sea estacionario.

Usando las expresiones anteriores para la función de autocorrelación y la varianza para el caso general AR( $p$ ), podemos obtener las expresiones respectivas para el caso AR( $p$ ) haciendo los coeficientes  $\varphi_j = 0$  para  $j \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \rho_k &= \varphi_1 \rho_{k-1}, \quad k > 0 \\ \sigma_z^2 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \varphi_1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Normalizando la función de autocorrelación ( $\rho_0 = 1$ ):

$$\begin{aligned} \rho_k &= \varphi_1^k, \quad k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \varphi_1 \\ \sigma_z^2 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \varphi_1^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Estas expresiones nos muestran dos cosas muy importantes para el análisis de los modelos

empíricos que se utilizarán para el cálculo de las tendencias. Primero, vemos que la función de autocorrelación en el caso AR(1) decae exponencialmente en función del desfase  $k$  de la serie de tiempo, y que éste decaimiento depende del valor de la autocorrelación. Por otro lado, es evidente que la varianza de la serie de tiempo no sólo depende de la varianza de la componente normal  $a_t$ , sino también de la “memoria” del sistema, representada por  $\phi_1$ .

### 3.3) CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE EN LA ESTIMACIÓN DE TENDENCIAS

En esta sección se describirá el modelo planteado por Tiao (1990) y Weatherhead (1998) para el cálculo apropiado de las incertidumbres en la estimación de tendencias en una serie de tiempo definida para  $T$  meses. Para este nuestro modelo, vamos a concentrarnos en fenómenos que puedan ser representados por series de tiempo de la forma:

$$Y_t = \mu + \omega X_t + \delta U_t + N_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3.33)$$

Vemos que los valores  $Y_t$  provienen de la suma de tres componentes principales. La primera es una recta descrita por  $\mu + \omega X_t$ , en la que  $X_t = t/12$  representa el número de años transcurridos en la serie y la pendiente  $\omega$  indica la tendencia. La segunda componente es  $\delta U_t$  y se utiliza para modelar cambios en el instrumento realizados en el tiempo  $t = T_0$ , ingresando un desplazamiento en la serie:

$$U_t = \begin{cases} 0, & t < T_0 \\ \delta, & t \geq T_0 \end{cases} \quad (3.34)$$

La última componente es  $N_t$  y modela el resto de fenómenos involucrados en el realización de la serie. Este proceso a su vez, debido a su naturaleza geofísica, debe ser modelado como un sistema con memoria. Por ésta razón se utiliza un proceso AR(1) como primera aproximación:

$$N_t = \phi N_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.35)$$

Como se vió en (3.32),  $\phi$  es el valor de la autocorrelación para un sólo un desplazamiento, mientras que  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria con distribución normal  $N(0, \sigma_\varepsilon)$ .

Con este modelo, la tendencia o pendiente  $\omega$  puede calcularse haciendo un ajuste lineal de mínimos cuadrados, en donde el proceso  $N_t$  representa el “error” asociado al ajuste. Por otro lado, para calcular la incertidumbre de  $\omega$ , se necesitarán algunos cálculos adicionales.

Para comenzar, podemos representar la serie de tiempo, en forma matricial:

$$Y = X\beta + N \quad (3.36)$$

Donde  $Y$  es el vector  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ ,  $X$  la matriz de  $T \times 3$  que contiene a los coeficientes reales que multiplican las incógnitas  $(\mu, \omega, \delta)'$  que componen el vector  $\beta$ . Por último el vector  $N$  contiene los elementos de la serie AR(1). Utilizando (3.31) podemos decir que

$$\epsilon = (\sqrt{1-\varphi^2} N_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_T) \quad (3.37)$$

De manera que se cumpla que

$$Cov[\epsilon] = \sigma_\epsilon^2 I \quad (3.38)$$

De la definición misma del proceso  $N_t$ , podemos despejar para  $\epsilon_t$ :

$$N_t - \varphi N_{t-1} = \epsilon_t \quad (3.39)$$

Definimos una matriz  $P$ , tal que:

$$PN = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varphi^2} & 0 & 0 & \dots \\ -\varphi & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\varphi & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \epsilon \quad (3.40)$$

A partir de la definición de  $P$  podríamos por ejemplo calcular la covarianza de  $N$ :

$$Cov[N] = Cov[P^{-1}\epsilon] = P^{-1}Cov[\epsilon]P^{-1} = \sigma_\epsilon P^{-1}P^{-1} \quad (3.41)$$

Si aplicamos entonces la matriz  $P$  a ambos lados del modelo matricial, tendremos:

$$Y^* = PY = PX\beta + PN = X^*\beta + \epsilon \quad (3.42)$$

El estimado por mínimos cuadrados del vector de las incógnitas,  $\beta_e$ , minimiza el “error”  $\epsilon_t$ , de manera que podemos calcular la pseudoinversa de la expresión anterior sin tener en cuenta al vector  $\epsilon$ :

$$\beta_e = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^* \quad (3.43)$$

Sabemos que la matriz de covarianza de  $\beta_e$  tiene la forma:

$$Cov[\beta_e] = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & Cov[\mu, \omega] & Cov[\mu, \delta] \\ Cov[\omega, \mu] & \sigma_\omega^2 & Cov[\omega, \delta] \\ Cov[\delta, \mu] & Cov[\delta, \omega] & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

La varianza buscada estará entonces determinada por el término (2,2) de la matriz de covarianza de (3.44). Utilizando las propiedades de la covarianza (Rubinstein, 2008) podemos decir que:

$$Cov[\beta_e] = Cov[(X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^*] = Cov[(X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} (X^* \beta + \epsilon)] \quad (3.45)$$

El argumento de la covarianza se divide en un término determinista y otro aleatorio:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\beta_e] &= \text{Cov}[(X^* X^*)^{-1} X^{*'} X^* \beta + (X^* X^*)^{-1} X^{*'} \varepsilon] \\ &= (X^* X^*)^{-1} X^{*'} \text{Cov}[\varepsilon] (X^* X^*)^{-1} X^{*'} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Al final tendremos que:

$$\text{Cov}[\beta_e] = \sigma_\varepsilon^2 (X^* X^*)^{-1} \quad (3.47)$$

Se debe entonces calcular la matriz inversa de la matriz cuadrada  $X^* X^*$ . Dado que se trata de la multiplicación de una matriz con su transpuesta, tendremos una simetría con respecto a la diagonal:

$$X^* X^* = X' P' P X = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_4 \\ h_2 & h_3 & h_5 \\ h_4 & h_5 & h_6 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

En donde:

$$\begin{aligned} h_1 &= (T-1)(1-\varphi)^2 + (1-\varphi^2) \\ h_2 &= \frac{1-\varphi}{12} \left[ \frac{T(T-1)(1-\varphi)}{2} + T + \varphi \right] \\ h_3 &= \frac{1}{144} \left[ \frac{T(T+1)(2T+1)(1-\varphi)^2}{6} + T^2 \varphi (1-\varphi) + T \varphi - \varphi^2 \right] \\ h_4 &= (T-T_0)(1-\varphi)^2 + (1-\varphi) \\ h_5 &= \frac{(T-T_0)(1-\varphi)}{24} \left[ (T+T_0)(1-\varphi) + 1 + \varphi \right] + \frac{1}{12} [T_0 - (T_0-1)\varphi] \\ h_6 &= (T-T_0)(1-\varphi)^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Calculando la inversa en (3.47), tendremos que el valor buscado para la incertidumbre de  $\omega$  será:

$$\sigma_\omega^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{h_6(h_1 h_6 - h_4^2)}{(h_1 h_6 - h_4^2)(h_3 h_6 - h_5^2) - (h_2 h_6 - h_4 h_5)^2} \quad (3.50)$$

Como buena aproximación, para valores pequeños de  $\varphi$ :

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\varphi)^2 n^3 [1-3\tau(1-\tau)]}, \quad \tau = \frac{T_0-1}{T} \quad (3.51)$$

Vemos que el parámetro  $\tau$  indica la fracción de realizaciones de la serie de tiempo que se dieron antes de la intervención en el equipo de medición. Además, en función de la varianza de  $N_i$ :

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2} \Rightarrow \sigma_\omega^2 = \frac{\sigma_N^2(1+\varphi)}{(1-\varphi)(T/12)^3 [1-3\tau(1-\tau)]} \quad (3.52)$$

Se puede demostrar que la incertidumbre en la tendencia, cuando no se incluye la función escalón en el modelo, será:

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{\sigma_N^2(1+\varphi)}{(1-\varphi)(T/12)^3} \quad (3.53)$$

La elección de escribir la tendencia en unidades por año para una serie de tiempo de valores mensuales, es arbitraria. Para el caso en el que por ejemplo tengamos una serie de datos diarios, que se extiende por  $T$  días, tendríamos que la incertidumbre:

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{\sigma_N^2(1+\varphi)}{(1-\varphi)T^3[1-3\tau(1-\tau)]} \quad (3.54)$$

Estos resultados pueden servir inclusive para estimar el tiempo requerido para medir una tendencia definida con una confianza estadística establecida. Para calcular este tiempo (o número de datos en la serie de tiempo), debemos partir indicando que por convención (Tiao, 1990) se dirá que una tendencia ha sido detectada con 95% de confianza si es que

$$|\omega_e| > 2\sigma_{\omega_e} \quad (3.55)$$

donde  $\omega_e$  y  $\sigma_{\omega_e}$  son la tendencia estimada y la incertidumbre estimada respectivamente. Es bastante razonable que la tendencia estimada se pueda modelar como una variable aleatoria con distribución normal  $\omega_e \sim N(\omega_0, \sigma_{\omega_e})$ , en donde  $\omega_0$  representa la tendencia real medida o promedio. Podemos entonces definir una variable auxiliar  $z$  que tenga una distribución normal estándar:

$$z = \frac{\omega_e - \omega_0}{\sigma_{\omega_e}} \quad (3.56)$$

Luego, la probabilidad de detectar una tendencia  $\omega_0$  será

$$Pr[|\omega_0| > 2\sigma_{\omega_e}] = Pr\left[z > 2 - \frac{|\omega_0|}{\sigma_{\omega_e}}\right] \geq 0.9, \quad \text{si } 2 - \frac{|\omega_0|}{\sigma_{\omega_e}} < -1.3 \quad (3.57)$$

Es decir, existe al menos una probabilidad del 90% de que la tendencia detectada sea efectivamente  $\omega_0$  si se cumple que

$$|\omega_0| > 3.3\sigma_{\omega_e} \quad (3.58)$$

En el caso de que

$$|\omega_0| \approx 3.3\sigma_{\omega_e} \Rightarrow Pr[|\omega_0| > 2\sigma_{\omega_e}] \approx 0.9 \quad (3.59)$$

Utilizando (3.55), podemos expresar (3.59) de otra manera:

$$\begin{aligned} |\omega_0| &\approx 3.3 \sqrt{\frac{\sigma_N^2(1+\varphi)}{(1-\varphi)T^3[1-3\tau(1-\tau)]}} \\ \Rightarrow T_e &\approx \left[ \frac{3.3\sigma_N}{|\omega_0|} \sqrt{\frac{1+\varphi_e}{1-\varphi_e}} \right]^{2/3} \frac{1}{[1-3\tau(1-\tau)]^{1/3}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Vemos que  $\sigma_N$  es la desviación estándar del error resultante del ajuste por mínimos cuadrados,  $\varphi_e$  es el estimado del primer valor de la función de autocorrelacion a partir de los

datos,  $\omega_0$  es la tendencia que buscamos encontrar y  $T_e$  es el tiempo (en las unidades utilizadas en el planteamiento del modelo) necesario para encontrar la tendencia  $\omega_0$ .

Para el análisis realizado en este trabajo,  $T$  representa el número de días necesario para detectar la tendencia  $\omega_0$ . Por otro lado, como cualquier otro estimado, este valor también posee una incertidumbre.

Antes de comenzar con el cálculo de esta incertidumbre, se debe recordar que una función de una variable aleatoria  $g(X)$  se puede expandir utilizando la expansión de Taylor sólo hasta primer orden (Papanicolaou, 2009):

$$g(X) \approx g(x_0) + g'(x_0)(X - x_0) \quad (3.61)$$

Donde  $x_0$  será el valor medio de la variable aleatoria  $X$ . Con esta expresión podemos hallar la varianza de  $g(X)$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(X)] &= E[(g(X) - g(x_0))^2] \\ &\approx E[(g'(x_0)(X - x_0))^2] = g'(x_0) \text{Var}[X] \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ahora, definimos una variable aleatoria con distribución normal de la forma:

$$Z = \log[T_e(\varphi_e)] \quad (3.63)$$

Vemos que esta definición se basa en el supuesto que la variable aleatoria  $T_e$  puede ser modelada con una distribución log-normal, debido a que de esta manera el intervalo calculado se mantiene positivo.

Utilizando la ecuación para la varianza de  $g(X)$ , tendremos que:

$$V \approx \left( \frac{d \log[T_e(\varphi)]}{d \varphi} \right)^2 \text{Var}[\varphi_e] \quad (3.64)$$

donde  $V$  es la varianza de la variable aleatoria  $Z$ . El primer factor está definido por la derivada de la expresión analítica hallada para  $T_e$ , mientras que el segundo factor es la varianza del estimado del primer valor de la función de autocorrelación.

Para el caso AR(1), la varianza de cada término  $k$  del estimado  $r_k$  de la función de autocorrelación estará dado por (Bartlett, 1946):

$$\text{Var}[r_k] \approx \frac{1}{N} \left( \frac{(1+\varphi^2)(1-\varphi^{2k})}{1-\varphi^2} - 2k\varphi^{2k} \right) \quad (3.65)$$

Con  $N$  indicando el número de datos. Para el primer término de la función, es decir  $k=1$ :

$$\text{Var}[r_1] \approx \frac{1-\varphi^2}{N} \quad (3.66)$$

Reemplazando esto en  $\varphi_e$ , la expresión (3.64) para  $V$ , y derivando:

$$V \approx \left( \frac{2}{3(1-\varphi)} \right)^2 \frac{1-\varphi^2}{T} \quad (3.67)$$

Con el 95% de confianza (por tratarse de una distribución normal) los estimados se encuentran en el rango:

$$Z \approx T_e \pm 2\sqrt{V} \quad (3.68)$$

Podemos decir con la misma certeza estadística que:

$$T_e \in [T_e e^{-2\sqrt{V}}, T_e e^{2\sqrt{V}}], \text{ con } V_e = V(\varphi_e) \quad (3.69)$$

Esta expresión puede utilizarse, por ejemplo, para comparar la capacidad que de diferentes instrumentos para la identificación de tendencias de cierta magnitud. Conociendo la función de autocorrelación estimada, podremos estimar el tiempo que se requerirá para medir una tendencia dada, de esta forma se pueden elegir ciertas locaciones o instrumentos en lugar de otros.

Con las herramientas desarrolladas en este capítulo, es posible realizar el estudio de las tendencias en las series de tiempo de  $h_m F2$ ,  $N_m F2$  y  $f_o F2$ .

## 4 MEDICIÓN Y PROCESAMIENTO DE DATOS

### 4.1) LA IONOSONDA Y LA ADQUISICIÓN DE DATOS

La ionosonda que se utiliza en el ROJ es la “Digisonde Portable Sounder” (DPS) de Lowell Digisonde International. A pesar de que aún se mantienen los principios fundamentales de procesamiento y adquisición de datos, ésta versión tiene varias mejoras en comparación de sus predecesoras (Figura 4.1): la “Digisonde 128” y la “Digisonde 256”. Desde el 2008 existe una nueva versión, la “Digisonde 4D”. El sistema de adquisición DPS viene con un software de procesamiento de datos llamado ARTIST (Automatic Real-Time Ionogram Scaler with True heights), que se encarga del escalamiento automático de los ecos, y de la inversión de parámetros.

Al igual que sus predecesores, el DPS puede medir simultáneamente siete parámetros en las señales recibidas:

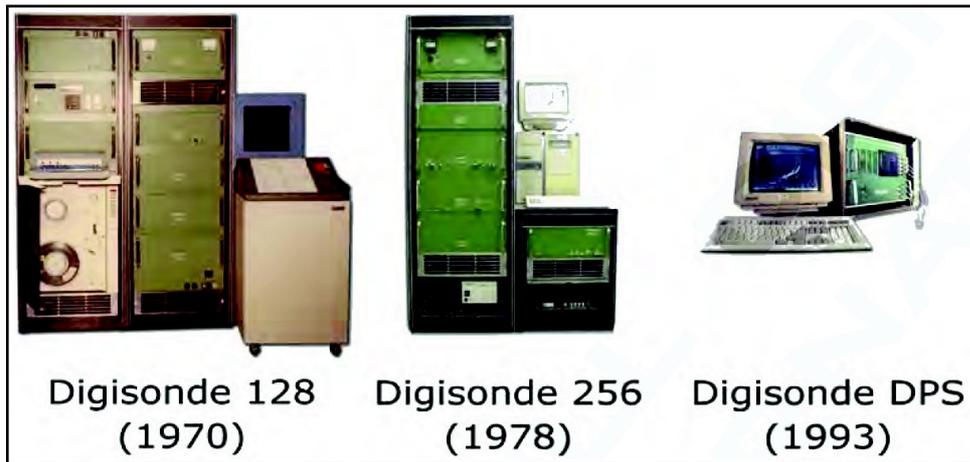
- Frecuencia.
- Rango (altura para incidencia vertical).
- Amplitud.
- Fase.
- Doppler.
- Angulo de incidencia.
- Polarización (ordinarias y extraordinarias, paralelas y perpendiculares al campo geomagnético respectivamente).

El DPS sondea la ionósfera emitiendo pulsos desde la antena transmisora y midiendo el tiempo que les toman para retornar a la antena receptora en tierra. Este barrido de pulsos se hace sobre un rango de frecuencias, en pasos que determinan la precisión de la medición.

Como se vió en el capítulo 2, el tiempo de vuelo de la onda depende de su frecuencia y del índice de refracción de la ionósfera a una altura específica.

Sabemos que el índice de refracción:

$$n = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \quad (4.1)$$



**Figura 4.1** Los diferentes sistemas de adquisición creados por Lowell Digisonde International (Lowell Digisonde International, 2009).

y que el tiempo de vuelo:

$$\tau = \int_0^{z_r} n_g(z) dz \tag{4.2}$$

Combinando (4.1) y (4.2) ecuaciones podemos obtener la altura virtual:

$$h'(f) = \int_0^{z_r} \frac{dz}{\sqrt{1 - f_p^2/f^2}} \tag{4.3}$$

Dado que por cada emisión de pulso es posible producir varias reflexiones, se reciben varios ecos con la misma frecuencia. En la Figura 4.2 podemos comparar dos ionogramas típicos, el de arriba generado por la “Digisonde 128” de Goose Bay en 1980 y el segundo por el sistema “DPS” del ROJ en el 2012. Ambas gráficas tienen como eje horizontal el rango de frecuencias y eje vertical las alturas.

Como se vió en el Capítulo 2, éstos valores corresponden a las distancias que hubieran viajado los frente de onda si es que la velocidad de grupo no se hubiera visto reducida por el índice de refracción del medio, es decir, si es que se hubiera trasladado a la velocidad de la luz.

Vemos en el gráfico de la “Digisonde 256” que además están señalados los valores de frecuencia máxima de las capas E y F ( $f_{oE}$  y  $f_{oF2}$ ). La velocidad de grupo de las ondas (ordinarias) que se propagan con éstas frecuencias tiende a cero a medida que se acercan al valor de la frecuencia del plasma de la ionósfera a esa altura. La relación entre la frecuencia del plasma y la densidad de electrones es bastante simple:

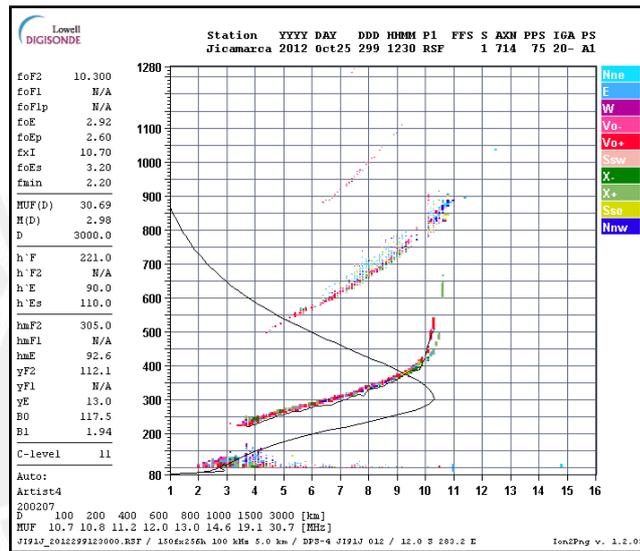
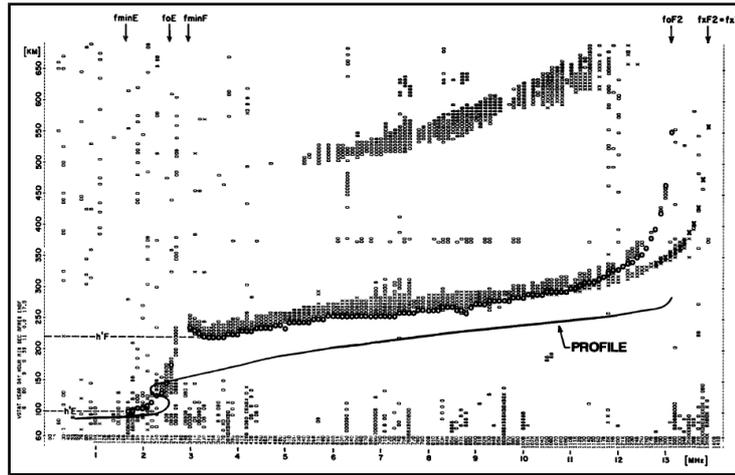


Figura 4.2 Además de los ecos, los gráficos muestran el perfil estimado de densidad electrónica (línea negra) (Reinisch, 1982; Lowell Digisonde International, 2009).

$$f_p^2 = \frac{N_e e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e} \tag{4.4}$$

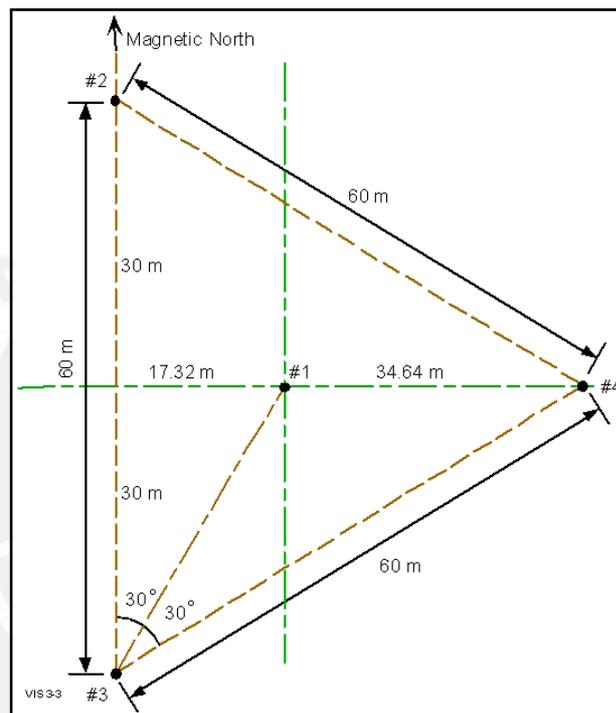
Las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) son válidas para el modo ordinario de propagación. Como primera aproximación se asume entonces que las ondas ordinarias son suficientes para reconstruir el perfil de densidad.

En el caso particular del ROJ, el sistema de la ionosonda que se utilizó para construir la serie de tiempo, fue renovado en una ocasión, de la versión DPS-1 a la DPS-4. Los cambios principales fueron:

- Cambio de una tarjeta de adquisición a una por antena.
- Actualización del ARTIST y del algoritmo de inversión.
- Algunas mejoras menores como la capacidad de la PC, un mecanismo de calibración

interna, etc.

El sistema de recepción de la DPS-1 y la DPS-4 consta de cuatro antenas en configuración triangular (Figura 4.3) que permite medir la dirección en la que las ondas planas llegan a la antena receptora. Cuando el frente de onda plano llega al sistema de antenas, va a ser detectado en diferentes tiempos por los diferentes receptores debido a la diferencia de caminos. Conociendo las distancias entre las antenas se puede reconstruir el frente de onda y luego, el ángulo de incidencia.



**Figura 4.3** La configuración de las antenas receptoras permite conocer el ángulo de incidencia de los frentes de onda (Lowell Digisonde International, 2009).

El sistema DPS-4 del ROJ se encuentra actualmente trabajando con los siguientes parámetros principales:

- Frecuencia inicial: 1000 kHz
- Incremento en frecuencia: 100 kHz
- Frecuencia final: 15000 kHz
- Tasa de repetición de pulso: 100 pps
- Rango inicial: 80 km
- Incremento en rango: 5 km

El sistema de autoescalamiento del DPS, selecciona en cada frecuencia los ecos de mayor

amplitud de los correspondientes a las ondas ordinarias. Luego de esto utilizan diferentes criterios para generar la curva final de alturas virtuales para las diferentes capas (Reinisch, 1982):

- Capa E :

El sistema realiza un ajuste con la función:

$$h'(f) = z_E - y_E + \frac{1}{2} y_E \frac{f}{f_o E} \ln \frac{f_o E + f}{f_o E - f} \quad (4.5)$$

donde todos menos la frecuencia  $f$  y la altura virtual  $h'$  son parámetros desconocidos. Los demás coeficientes se hallan por un ajuste de mínimos cuadrados.

- Capa F :

A diferencia del ajuste de la capa E, el perfil de la capa F se construye en dos etapas. Primero se forma un trazo base, buscando los puntos de mayor amplitud alrededor del “centro base”, definido como el punto de menor cambio en  $h'$  y mayor amplitud del eco. Éstos puntos conforman la “línea base”. Para los ecos cercanos a  $f_o F2$ , se realiza un ajuste con una función hiperbólica, pero ésta vez también se toman en cuenta los ecos de las ondas extraordinarias, para hacer el análisis más robusto (en la capa F disminuyen los ecos de ondas ordinarias). Luego, se toman los tres últimos puntos de la línea base y se les ajusta la hipérbola:

$$h'_{x,o}(f) = r + \frac{1}{a + b f_{x,o}} \quad (4.6)$$

En donde “x” indica las frecuencias de ecos extraordinarios y “o” las de los ordinarios. Los parámetros  $r$ ,  $a$  y  $b$  serán ajustados por mínimos cuadrados. Éstas dos hipérbolas poseen los mismos parámetros, pero están desplazadas media girofrecuencia:

$$f_x = f_o \left(1 + \frac{H}{2}\right) \quad (4.7)$$

Este procedimiento se realiza para los tres siguientes puntos hasta llegar al centro de la línea base. Luego, se repite todo el procedimiento para tres puntos espaciados por dos y luego tres frecuencias. Al final se elige el perfil que maximice la suma de las amplitudes de los ecos sobre las dos hipérbolas.

## 4.2) INVERSIÓN DEL PERFIL DE DENSIDADES

Con la curva final de alturas virtuales y algunos parámetros importantes calculados en el proceso de autoescalamiento, el ARTIST se encarga de obtener el perfil de densidades

$n(h)$ . Para ésto, necesita las alturas del inicio de las capas E, F1 y F2 ( $h_sE$ ,  $h_sF1$  y  $h_sF2$  respectivamente), un modelo para la densidad de electrones entre  $h_mE$  (la altura máxima de la capa E) y  $h_sF2$  y suficientes datos del perfil de alturas virtuales en función de la frecuencia (Huang, 1996).

En 1960, Becker mostró que las capas E y F pueden modelarse en condiciones tranquilas como funciones de Chapman cuyo factor de escala de altura sea variable. Se utilizarán polinomios de Chebychev para modelar los perfiles de densidades debido a que no sólo se ajustan bien a la función de Chapman con escala de altura variable, sino también que los errores de la aproximación están distribuidos de manera más uniforme en el caso de una expansión de Taylor (Huang, 1996).

La distribución de electrones en la capa E puede ser modelada como una sección de parábola (Figura 4.4):

$$f^2 = f_m E^2 \left[ 1 - \left( \frac{h - h_m E}{y} \right)^2 \right] \Rightarrow h(f) = h_m E - y \sqrt{1 - \left( \frac{f}{f_m E} \right)^2} \quad (4.8)$$

“y” representa la mitad del lado recto de la parábola mientras que  $h(f)$  indica la altura en función de la frecuencia  $f$ .  $h_mE$  es la altura de la densidad máxima de electrones de la capa E y  $f_mE$  su frecuencia de plasma máxima.

Al utilizar polinomios de Chebychev  $T_i$  para expandir el argumento de la raíz, tendremos:

$$h(g) = h_m E + y \sqrt{g} \sum_{i=0}^2 C_i T_i(g) \quad \text{con} \quad g = \frac{\ln(f/f_m E)}{\ln(f_s E/f_m E)} \quad (4.9)$$

Donde  $f_s$  indica la frecuencia en el inicio de la capa respectiva, por ejemplo  $f_sE$  es la frecuencia máxima en el comienzo de la capa E. Vemos que los valores faltantes para tener el perfil  $h(g)$  totalmente determinado son  $h_mE$  e “y”.

Para calcular los coeficientes de la expansión anterior, nos valemos de una relación propuesta por Reinisch (1983):

$$\Delta h'_k = h'_k - h_s = \sum_{i=0}^I A_i S(f_k) \quad (4.10)$$

Esta expresión nos indica la contribución de cada valor de frecuencia  $f_k$  a la altura virtual  $\Delta h'_k$ . La función analítica  $S(f_k)$  estima la respuesta de la onda que viaja através de la ionósfera en función de su frecuencia  $f_k$ , el índice de refracción, etc. Para el caso de la capa (E), tendremos:

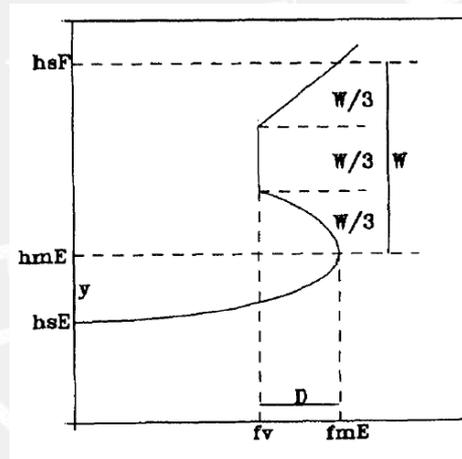
$$h'_k = h_s E + y \sum_{i=0}^2 C_i S(f_k) \quad (4.11)$$

Los únicos parámetros desconocidos aquí son  $h_s E$  e “ $y$ ”, que pueden ser hallados utilizando mínimos cuadrados. De la primera expansión con polinomios de Chebychev, vemos que para  $g=1$ :

$$h_s E = h_m E + \sum_{i=0}^2 C_i \quad (4.12)$$

Lo que nos permite calcular “ $y$ ” y  $h_m E$ , con lo que el perfil de la capa E ya está totalmente definido.

Entre la capa E y F se encuentra el llamado “E-F Valley”, y su estructura no está totalmente comprendida. Para modelar esta región, se hizo uso de un modelo empírico propuesto por Mahajan (1994), en base a los estudios que realizó con el radar de dispersión incoherente de Arecibo. Como se ve en la Figura 4.4, este valle estará formado por 3 sectores: una sección de parábola, una región de densidad constante y otra de crecimiento lineal.



**Figura 4.4** Titheridge demostró que no se puede estimar la densidad del valle E-F a partir de las mediciones de la región F (a pesar de que ésta contenga información sobre la ionización en el valle E-F) (Titheridge, 1980).

Los dos parámetros a calcular dependen del ángulo con el zenith  $\chi$ :

$$W = 59.45 - 14.63 \ln \left( \frac{0.05 + cs + |cs|}{0.05 - cs + |cs|} \right) \quad (4.13)$$

$$D = [1 - \sqrt{dp}] f_m E$$

Con:

$$cs = 0.05 + \cos \chi$$

$$dp = 0.49 + 0.46 \frac{e^{(59.45 - W)/14.63} - 1}{e^{(59.45 - W)/14.63} + 1} \quad (4.14)$$

Por último, el caso de la capa F es bastante similar. Vemos que es posible calcular  $h_s F$  de:

$$h_s F = h_m E + W \quad (4.15)$$

Y  $h_m F$  de la misma manera que para la capa E:

$$h_m F = h_s F - \sum_{i=0}^4 C_i \quad (4.16)$$

Luego, el perfil de la capa F puede ser descrito por:

$$h F(g) = h_m F + \sqrt{g} \sum_{i=0}^2 C_i T_i(g) \quad (4.17)$$

Es importante mencionar que los cálculos expuestos en esta sección presentan de manera simple el método de inversión que utiliza el ARTIST, llamado NHPC y a pesar de no ser exactamente igual al que utiliza actualmente la ionosonda de Jicamarca, las diferencias son mínimas (los detalles de las mejoras no se encuentran publicados).

### 4.3) EL FORMATO SAO

Desde 1987, el “Ionospheric Informatics Working Group” (parte de la comisión G de URSI) ha desarrollado recomendaciones para el diseño del formato de los datos obtenidos del escalamiento de ionogramas, con el objetivo de optimizar su almacenamiento y difusión. El formato SAO se desarrolló inicialmente para almacenar los ionogramas procesados por el ARTIST siguiendo las recomendaciones de la URSI. Sin embargo, fue la creación del formato SAO 4.1 (el utilizado actualmente en el ROJ) el que le ha permitido convertirse en el formato estándar para el intercambio de ionogramas producidos por diferentes sistemas de adquisición.

Como la mayoría de grupos de datos, los archivos de salida del ARTIST correspondientes a los autoescalamientos, está conformado por una cabecera y por los datos en sí. En la Figura 4.5 se puede apreciar un extracto de un archivo SAO.

Los números en negrita representan la cabecera, y cada uno de ellos corresponde al número de datos de un grupo en particular con su propio formato de texto (descrito en las especificaciones del archivo SAO). Cada línea tiene como máximo 120 caracteres, en donde se pueden mezclar números, letras y símbolos. Los ceros de la cabecera indican que no se obtuvieron datos de ese grupo durante la medición. Por diferentes motivos, a veces el sistema puede no obtener alguno de los parámetros, en éste caso se coloca en su lugar el valor 9999.000. A continuación vamos nombrar los grupos que pueden apreciarse en el ejemplo:



- Grupo 1: Constantes Geofísicas (5 elementos)

.800 2.000 -12.000 283.200 16.000

- Grupo 2: Descripción del Sistema y Mensaje del Operador (1 elemento)

DPS-4 204/JI91J, ARTIST 0702, NH 4.21 |

- Grupo 3: Parámetros de Tiempo y del Sondeo (77 elementos)

FF200721608040000000120126201000010010000000001107301000080502560000820140  
000

- Grupo 4: Parámetros de la Ionósfera (43 elementos)

6.300 9999.000 3.292 20.741 2.100 9999.000 2.100 9999.000 9999.000 6.700 230.000  
9999.000 9999.000 9999.000 110.000 20.000 9999.000 9999.000 .000 9999.000 9999.000  
9999.000 9999.000 3000.000 5.900 320.000 .000 .380 2.100 9999.000 9999.000 286.200  
9999.000 241.219 6.876 9999.000 64.166 9999.000 6.852 33.658 60.200 2.660 .000

Cada archivo contiene todas las mediciones realizadas durante un día en particular, por lo que pueden haber muchas cabeceras (una por medición, aproximadamente cada quince minutos) con sus respectivos grupos de datos.

En total son 80 grupos de datos, pero el más relevante para éste trabajo será el grupo 4. Los valores que nos interesan están en las posiciones 1 y 32 del grupo 4, es decir,  $f_oF2$  y  $h_mF2$  respectivamente. Por ejemplo, en el archivo mostrado, tenemos  $f_oF2=6.3$  MHz y  $h_mF2=9999.000$  (no hay valor).

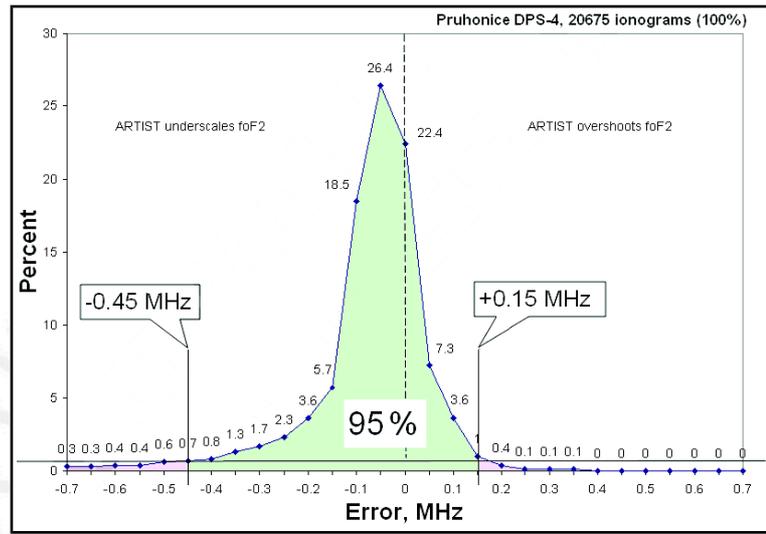
#### 4.4) INCERTIDUMBRE EN LOS DATOS ADQUIRIDOS

En general, el ARTIST es bastante eficiente. En estudios realizados por Huang (1996), se validan los parámetros extraídos con el DPS usando las mediciones de los radares de dispersión incoherente de Millstone Hill y Arecibo. Sin embargo, existen ciertos fenómenos que dificultan las mediciones.

La inestabilidad del plasma de la ionósfera ecuatorial que causa más problemas a la inversión de parámetros es el “ESF” (Equatorial Spread F). Estos eventos ocurren principalmente durante la noche, aunque también se tiene evidencia de estos en el día. La capacidad del ARTIST para invertir los parámetros puede verse bastante disminuida dependiendo de las condiciones del spread F.

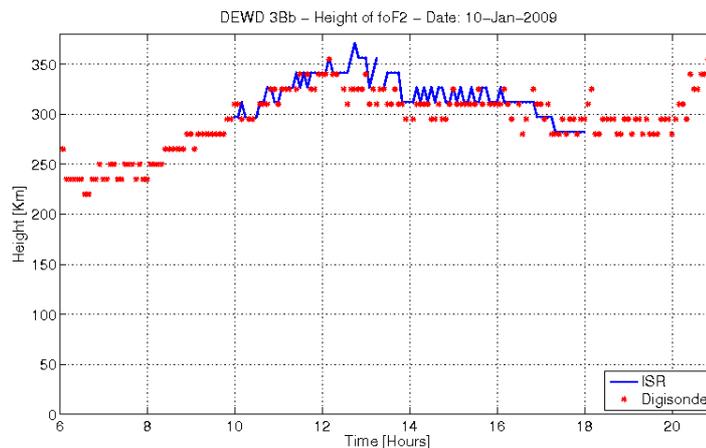
El grupo de “Lowell Digisonde” realizó un estudio estadístico de la precisión del ARTIST 5

(en este trabajo se utilizó el ARTIST 4, pero éste análisis nos da una idea de la cota inferior en la incertidumbre). En este estudio se asumieron dos cosas: que el error asociado al cálculo de  $h'(f)$  es pequeño en comparación al de  $h(f)$  y que el escalamiento manual es correcto. Teniendo en cuenta éstos supuestos, generaron un histograma para los errores (escalamiento manual vs automática) relativos a las mediciones de  $f_oF2$  (Figura 4.6) de más de 250 000 ionogramas. Concluyeron, con el 95% de confianza, que las incertidumbres podrían estar entre los -0.45 y +0.15 MHz.



**Figura 4.6** Éste estudio estadístico fue realizado con el DPS de la estación de Pruhonice, en República Checa (Lowell Digisonde International, 2009).

Respecto a  $h_mF2$ , las mediciones del radar de dispersión incoherente del ROJ muestran una buena correlación con los valores estimados con la ionosonda (Figura 4.7).



**Figura 4.7** Gráfica de la altura de  $f_oF2$  ( $h_mF2$ ). La línea azul corresponde a las mediciones obtenidas con el radar de dispersión incoherente, y las rojas con la ionosonda.

El ROJ cuenta con más de 5000 archivos SAO que cubren desde el 20 de julio de 1993 hasta el 24 de abril del 2000 y del 17 de mayo del 2001 hasta la actualidad. La actualización que se le dió al sistema de adquisición (de DPS-1 a DPS-4) se llevó a cabo entre el 24 de abril del 2000 y el 17 de mayo del 2001. Durante este tiempo (casi 390 días) no se pudieron tomar datos.

#### 4.5) LECTURA DE PARÁMETROS

Se escribió una aplicación en python que procesa los archivos SAO para generar otro que muestra la fecha y hora en UT (la corrección con la hora local es de -5:00 h) y además todos los valores de  $f_oF2$  y  $h_mF2$  (Figura 4.8). Podemos apreciar la presencia de varios valores “nan”, correspondientes a los 9999.000 arrojados por el ARTIST.

Para hacer el análisis más robusto, y ya que para nuestro estudio podemos ignorar los eventos aislados, se eliminaron las filas con algún valor “nan”. Es necesario agregar, que la frecuencia de valores “nan” disminuyó luego de la actualización del sistema DPS-1.

1993	Jul	20	12	49	13.8	345.3
1993	Jul	20	13	11	7.9	nan
1993	Jul	20	13	29	13.7	306.7
1993	Jul	20	13	44	nan	nan
1993	Jul	20	13	59	8.2	nan
1993	Jul	20	14	14	11.9	nan
1993	Jul	20	14	29	13.2	260.9
1993	Jul	20	14	44	8.2	212.3
1993	Jul	20	14	59	nan	nan
1993	Jul	20	15	14	10.5	296.8
1993	Jul	20	15	29	nan	nan

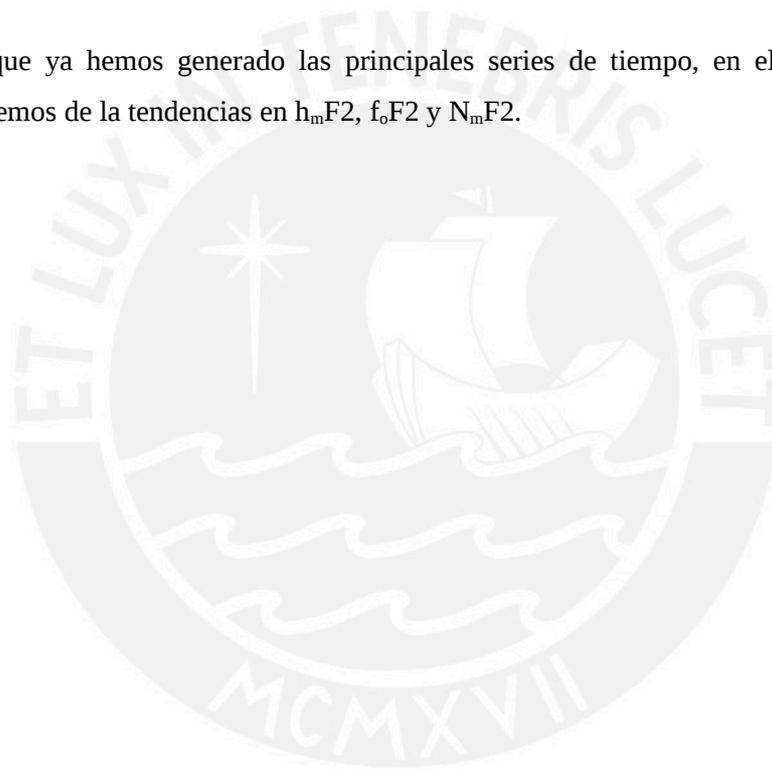
**Figura 4.8** Extracto del archivo construido a partir de los archivos SAO producidos por la ionosonda del ROJ. En cada fila, de izquierda a derecha tenemos: año, mes, día, hora, minutos,  $f_oF2$  (MHz) y  $h_mF2$  (km)

Como se mencionó en el Capítulo 1, es necesario poder representar la actividad solar con alguna serie de tiempo. En este trabajo, tomaremos el parámetro F10.7 cm como un buen representante del flujo solar. Estos valores se descargaron de la base de datos de “Madrigal”, en donde son regularmente actualizados por la “NOAA” desde 1950. Por último, se desarrolló un archivo de texto que muestre únicamente la fecha y el valor de F10.7 cm (Figura 4.9).

1997	12	5	103.8
1997	12	6	108.8
1997	12	7	99.0
1997	12	8	98.1
1997	12	9	96.7
1997	12	10	95.1
1997	12	11	96.4
1997	12	12	92.5
1997	12	13	89.3

**Figura 4.9** Extracto del archivo correspondiente a las mediciones del parámetro F10.7 cm, extraído de la base de datos de Madrigal. De izquierda a derecha tenemos: año, mes, día y F10.7 en unidades de flujo solar.

Ahora que ya hemos generado las principales series de tiempo, en el siguiente capítulo analizaremos de la tendencias en  $h_m F2$ ,  $f_o F2$  y  $N_m F2$ .



## 5 PROCESAMIENTO DE DATOS Y ANÁLISIS DE TENDENCIAS

Como se vió en el capítulo 2, el modelo numérico más completo hasta la fecha de la evolución de la ionósfera bajo los efectos de los gases de efecto invernadero es el desarrollado por Qian (2008). Este modelo predice, para la región sobre Jicamarca, una caída de entre 18 y 22 km en  $h_mF2$  y de entre 14 y 18% para  $N_mF2$  al doblarse la concentración de  $CO_2$  (Qian, 2009). Éstos resultados, junto con los de Cnossen (2008) de  $-0.35$  km/año en  $h_mF2$  y  $-0.017$  Mhz/año en  $f_oF2$  para la región de Huancayo, son los únicos que nos proveen de alguna referencia respecto a la magnitud de las tendencias sobre Jicamarca, ya que debido a su inherente variabilidad longitudinal y latitudinal (Pacheco, 2013; Pedatella 2011; Jarvis 2009), no es posible utilizar valores calculados en regiones más alejadas.

En éste capítulo se mostrarán primero los criterios utilizados para convertir los datos de la ionosonda en series de tiempo, luego se presentará el método de Bremer para el cálculo de tendencias. A pesar de que este método es el más utilizado en el campo, no es posible aplicarlo sin tener algunas consideraciones extra, definidas por las características propias de la serie. Esto se hará evidente cuando se analicen los primeros resultados, ya que se encontrarán diversos indicadores de que el análisis debe ser perfeccionado. Por último, se planteará una nueva aproximación al análisis, y se evaluarán los parámetros estadísticos obtenidos.

### 5.1) CONSTRUCCIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO

En la última parte del capítulo 4, se mostró un extracto del archivo de datos que se formó a partir de las mediciones de la ionosonda. Como se pudo apreciar, la mayor parte de las mediciones fueron realizadas cada 15 minutos. Se decidió crear tres series de tiempo para cada parámetro definidas por tres intervalos de tiempo: de 4 a 8, 10 a 14 y de 16 a 20 horas. Durante el primer intervalo la atmósfera comienza a ionizarse, durante el segundo llega a su ionización máxima y en el último la ionización por fotones solares casi desaparece por completo. Se decidió tomar un intervalo de cuatro horas no sólo para hacer más robusta la estadística, sino también para abarcar las diferentes horas en los que estos procesos ocurren durante el año (Ulich, 1997).

Una vez separados los datos por intervalos, se calculó la mediana de cada intervalo. Esto se hizo tanto para la base de datos de  $h_mF2$  como para la de  $f_oF2$ . Luego de calcular las medianas por intervalos, se generó un archivo para cada intervalo. Tenemos así por ejemplo,

para el intervalo de 10 a 14 horas, un extracto de su respectivo archivo de datos:

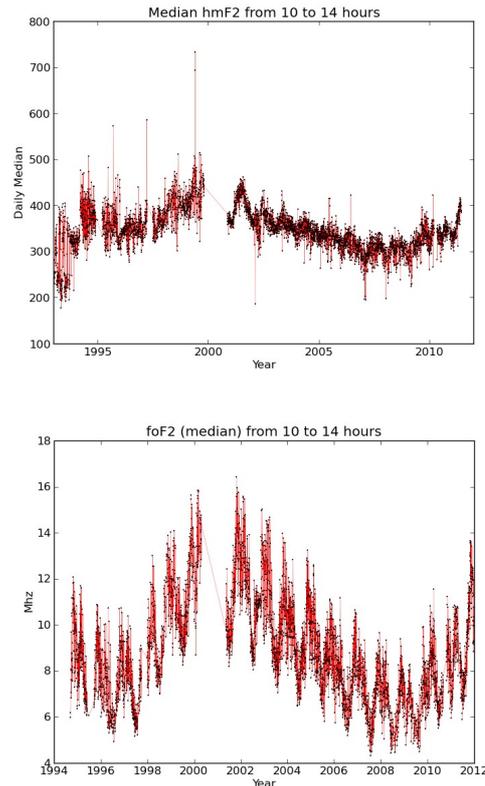
109	2002	4	19	10	30	15.0	406.2
109	2002	4	19	10	44	14.5	420.8
109	2002	4	19	11	00	13.0	396.5
109	2002	4	19	11	15	12.1	383.8
109	2002	4	19	11	30	11.7	374.5
109	2002	4	19	11	45	11.7	370.6
109	2002	4	19	12	00	11.8	375.6
109	2002	4	19	12	14	11.5	361.9
109	2002	4	19	12	30	11.5	368.6
109	2002	4	19	12	45	11.7	385.3

**Figura 5.1** Extracto del archivo generado de medianas de  $f_oF2$  y  $h_mF2$ . De izquierda a derecha: día del año, año, mes, día, hora, minuto,  $f_oF2$  (Mhz) y  $h_mF2$  (km).

En la Figura 5.2 podemos apreciar los gráficos que representan a las series de tiempo de  $h_mF2$  y  $f_oF2$ . En  $f_oF2$  se puede reconocer un comportamiento cíclico de aproximadamente un año de amplitud, más evidente que en el caso de la serie de  $h_mF2$ . Por otro lado, se puede notar una menor varianza a lo largo de la serie de  $h_mF2$ . Sin embargo, una cosa que las 2 gráficas presentan en común es el comportamiento cíclico de alrededor de 11 años, cuyo máximo se encuentra cerca del año 2001 y con mínimos alrededor de 1997 y de 2008.

En la Figura 5.3 se muestran las series de tiempo para  $h_mF2$  y  $f_oF2$  para los intervalos de 4 a 8 horas y el de 16 a 20 horas.

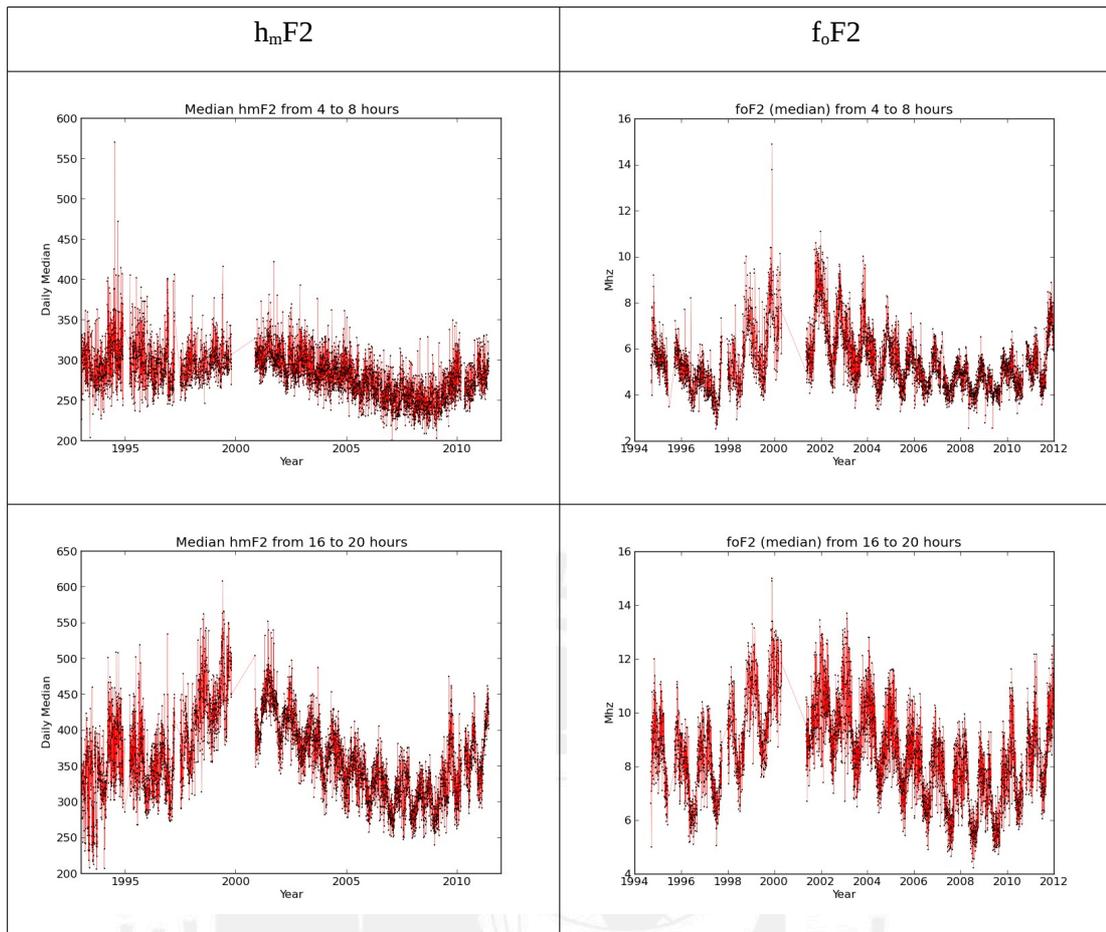
Lo primero que se observa es la diferencia en la dispersión de los datos, mientras que para  $h_mF2$  las series correspondientes al amanecer y atardecer presentan una mayor varianza en comparación a la del medio día, la dispersión se mantiene casi igual para el caso de  $f_oF2$ .



**Figura 5.2** Series de tiempo de los valores de las medianas diarias de  $h_mF2$  y  $f_oF2$  respectivamente, para el intervalo de 10 a 14 horas.

El comportamiento cíclico perdura de manera más evidente en los diferentes intervalos de  $f_oF2$ , lo que era de esperarse ya que la densidad de electrones solo depende de la relación entre las concentraciones de O,  $N_2$ , los coeficientes de difusión y escala de altura (Hargreaves, 2003), cuyos valores tienen un comportamiento estacional. Por otro lado,  $h_mF2$  depende no solo de las condiciones que dan lugar a la densidad máxima de electrones, sino también de otras variables físicas de la región en donde ésta se forma. Por ejemplo, se sabe que la localización del pico de densidad está relacionado con los vientos neutros (Rishbeth, 1969), que presentan una dinámica bastante compleja. Ésto le da un grado más de libertad a  $h_mF2$  y por lo tanto, causa una dispersión más variada para los diferentes intervalos.

Otro aspecto importante es el del desplazamiento de las series. Mientras que  $f_oF2$  alcanza el máximo alrededor del mediodía debido a que la producción de electrones es también máxima,  $h_mF2$  crece paulatinamente hasta llegar a su máximo en el atardecer debido a la interacción con los vientos de la termosfera (Rishbeth, 1975). Podemos notar que la serie de 10 a 14 horas de  $h_mF2$  oscila alrededor de los 350 km, mientras la de 16 a 20 horas oscila alrededor de los 400 km.



**Figura 5.3** Series de tiempo de los valores de las medianas diarias de  $f_oF2$  y  $h_mF2$  para el amanecer y el atardecer.

Como se comentó en el capítulo anterior, la ionosonda de Jicamarca fue enviada a que le realicen una mejora al sistema de adquisición de datos entre abril del 2000 y mayo del 2001. Es por esto que se observa un vacío de casi un año en las series de tiempo presentadas.

Como sugieren las Figuras 5.2 y 5.3, la dinámica de  $h_mF2$  y  $f_oF2$  parece estar influenciada por diversos procesos. Si nuestra tarea consiste en evaluar la posibilidad de la presencia de una tendencia debido a la contracción de la alta atmósfera a causa del efecto invernadero, se debe plantear un modelo en el que se pueda identificar la tendencia.

Bremer (1990) propuso un método conocido en estadística como “deseasonalizing” (extracción de temporadas o ciclos) para modelar estas series de tiempo y estimar las tendencias presentes.

El primer reto es el de encontrar un modelo empírico que se ajuste suficientemente bien a los datos reales. Sin embargo, cabe recalcar que en ningún momento se propone construir un modelo que permita hacer predicciones ya que este sistema está influenciado por muchos

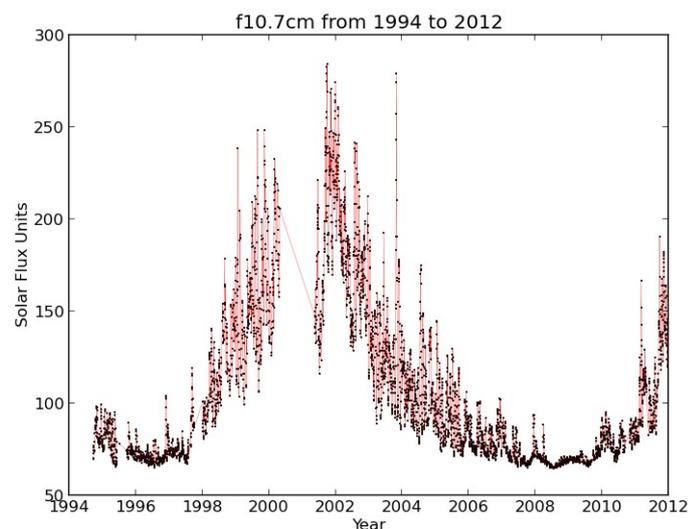
procesos. Es suficiente con extraer cualquier posible tendencia artificial para lograr que la tendencia buscada sea más fácil de identificar.

Para la construcción del modelo empírico, comenzamos con un planteamiento simple:

$$h_m F 2 = \mu + \omega t + \text{Actividad Solar} + \text{Error} \quad (5.1)$$

En ésta expresión se asume que  $h_m F 2$  puede modelarse como la suma de una recta con la actividad solar.  $\mu$  es una constante, mientras que  $\omega$  representa la tendencia presente en los datos. Existen diversos estudios en los que hacen uso de diferentes series de tiempo como representación de la actividad solar en el modelo. Las más utilizadas son el número de manchas solares y el flujo de las ondas electromagnéticas solares con una longitud de onda de 10.7 cm (F10.7).

Para nuestro modelo, utilizaremos el parámetro F10.7, basándonos principalmente en los estudios realizados por Lastovicka (2006), quien afirma que esta serie de tiempo logra un mejor ajustes con las mediciones. La serie de F10.7 proviene de emisiones térmicas de la cromósfera y corona baja del sol, en donde el plasma está más fuertemente influenciado por los campos magnéticos (Tapping, 1987). Por otro lado, teniendo en cuenta que la principal fuente de fotoionización de la ionósfera se encuentra en el ultravioleta extremo (EUV), se espera que la serie que se utilice para representar la actividad solar tenga una buena correlación con el EUV, característica que cumple F10.7 (Mielich 2013).



**Figura 5.4** Serie de tiempo de F10.7.

En la Figura 5.4 se muestra la serie de tiempo para F10.7 entre los años 1994 y 2012.

Podemos apreciar el ciclo solar de 11 años, con el máximo alrededor del año 2001. Como se comentó en el capítulo anterior, la serie de F10.7 fue construida a partir de valores promedio diarios de flujo solar, descargados de la base de datos de “Madrigal”. Luego se eliminaron los días en los que no se tenían datos de  $h_m F_2$  y  $f_o F_2$ .

La dependencia de las series de  $h_m F_2$  y  $f_o F_2$  con la de F10.7 se manifiesta en varios indicadores. En la serie de  $f_o F_2$  del amanecer (Figura 5.3), se puede identificar (con mayor facilidad que para los demás casos) una gran similitud con la serie de tiempo de F10.7, especialmente alrededor del máximo y los dos mínimos, ya que al igual que para F10.7, la amplitud de las oscilaciones crece cerca al máximo y decrece cerca a los mínimos. Para los dos siguientes intervalos (Figura 5.2 y 5.3), se puede notar que la correlación con la serie de F10.7 disminuye (a diferencia de F10.7, para el atardecer en  $f_o F_2$  la amplitud de las oscilaciones anuales a lo largo de la serie es casi la misma).

Algo diferente ocurre con la serie de  $h_m F_2$ . Mientras que para  $f_o F_2$  los datos correspondiente al amanecer presentan la más alta correlación con F10.7, la serie de 4 a 8 horas de  $h_m F_2$  difiere considerablemente. Incluso se puede notar que la correlación aumenta con las horas (la oscilación de 11 años es más pronunciada al atardecer). Otra diferencia con respecto a  $f_o F_2$ , es que las amplitudes de las oscilaciones anuales de  $h_m F_2$ , permanecen similares a lo largo del tiempo de muestreo pero son diferentes para cada uno de los tres intervalos.

Es importante comentar que parte de las diferencias entre las dos series, probablemente se debe a que las mediciones de  $f_o F_2$  son casi directas, mientras que las de  $h_m F_2$  deben pasar por un proceso de inversión muy complejo. Ya que el ARTIST no es un software libre, no fue posible saber con precisión que tan robusto es el algoritmo.

## 5.2) PRIMERA APROXIMACIÓN Y EL MÉTODO DE BREMER

Utilizando F10.7 para representar la actividad solar en el modelo, tenemos que:

$$h_m F_2 = \mu + \omega T_t + c F_{10.7} + N_t \quad (5.2)$$

El índice  $t$ , recorre desde uno hasta la cantidad de datos en la serie.  $T_t$  representa los días en los que se cuenta con datos. Luego,  $t=1, \dots, 5146$  mientras que  $T_t=1, \dots, 6462$  en incrementos irregulares debido a que hay días en los que no se logró invertir alguno de los parámetros (sin tener en cuenta el vacío en la serie debido a la actualización del equipo). La constante  $c$  será determinada utilizando mínimos cuadrados. El error estará representado por  $N_t$ , pero debido a que estamos modelando un sistema con memoria (Tiao, 1990), como se mostró en el capítulo

3, podemos utilizar un modelo AR(1) para representar el error:

$$N_t = \phi N_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{donde} \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon) \quad (5.3)$$

El método planteado por Bremer, consta de “extraer” la actividad solar en un intento por eliminar el ciclo solar y, bajo el supuesto del modelo, quedarnos con sólo una recta cuya pendiente representaría la tendencia causada por la contracción de la termósfera. Esta nueva serie de tiempo estaría conformada por la diferencia o residuo entre los datos reales y el modelo empírico. Formamos entonces la serie de los residuos de  $h_m F2$ :

$$\Delta h_m F2_t = h_m F2_t - c F10.7_t = \mu + \omega T_t + N_t \quad (5.4)$$

Luego de calcular la serie de residuos, se utiliza un ajuste de mínimos cuadrados para estimar  $\mu$  y  $\omega$ . Utilizando los resultados del capítulo 3, tenemos que la incertidumbre en la estimación de  $\omega$  estará dada por:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\sigma_N^2(1+\phi)}{(1-\phi)T^3} \quad (5.5)$$

Donde  $T$  equivale al número total de datos. Esta expresión nos da el valor de incertidumbre para una tendencia diaria. No incluir el término de la autocorrelación de los datos cuando es significativamente diferente de cero, no sólo lleva a una obvia falla en la estimación del error, sino que produce una inconsistencia importante en los valores de la tendencia calculada cuando se construyen series de tiempo a partir de los promedios en sub intervalos de tiempo (serie de valores quincenales, mensuales, anuales, etc) (Emmert, 2011).

Con  $\phi_e$  (autocorrelación estimada del error en el ajuste) podemos calcular, con una probabilidad del 90%, el tiempo  $T_e$  en el que nos demoraría encontrar una tendencia  $\omega_e$ :

$$T_e \in [T_e e^{-2\sqrt{V_e}}, T_e e^{2\sqrt{V_e}}] \quad (5.6)$$

Donde:

$$T_e \approx \left[ \frac{3.3 \sigma_N}{|\omega_0|} \sqrt{\frac{1+\phi_e}{1-\phi_e}} \right]^{2/3}, \quad V_e \approx \left( \frac{2}{3(1-\phi_e)} \right)^2 \frac{1-\phi_e^2}{T} \quad (5.7)$$

Se desarrolló un script en python para construir las series de residuos, estimar los parámetros de ajuste del modelo empírico y calcular las incertidumbres para  $h_m F2$ . En la Figura 5.5 podemos apreciar la serie de residuos de  $h_m F2$  junto con la recta de ajuste y al costado, los parámetros calculados para los tres intervalos. Vemos que el ciclo solar de 11 años no se muestra de manera tan explícita en la serie de residuos como en las series originales.

En los tres casos se hallaron pendientes negativas, lo que parece indicar que efectivamente

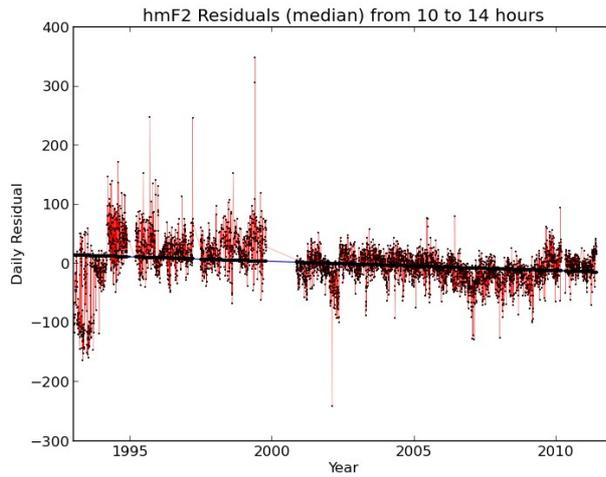
las suposiciones de Rishbeth eran correctas. Sin embargo, los valores que toman las diferentes pendientes son significativamente mayores a los encontrados en estudios similares. Si bien el valor de las tendencias es sensible a la longitud y latitud, suelen ser en su gran mayoría menores a 1 km/año para el intervalo del medio día (Bremer, 1992; Ulich, 1997; Danilov, 1998; Mahajan, 2007; Jarvis, 2009), el único estudio que se ha realizado para la zona del Perú fue realizado por Cnossen (2008) y arroja una tendencia de -0.35 km/año. Por otro lado, las simulaciones numéricas de Qian arrojan valores de menos de -0.3 km/año para esta región de la ionósfera.

Vemos que los errores asociados a las estimaciones son de alrededor del 5%, lo que se debe probablemente a la gran cantidad de datos analizados. Sin embargo, el valor de la autocorrelación es demasiado alto para un modelo AR(1).

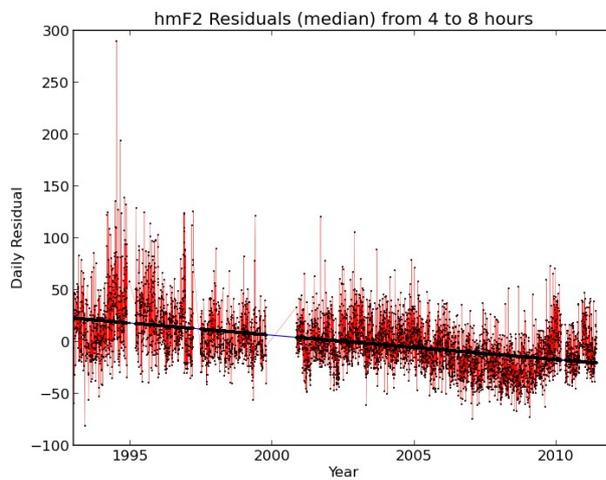
Entre 1993 y 1994 se puede notar una irregularidad en la serie de tiempo que se mantiene visible en los tres intervalos. Ésta anomalía se originó, al parecer, debido a que al inicio de sus mediciones, el sistema de adquisición trabajó con diferentes parámetros, generando valores inconsistentes.

Los valores de la correlación lineal entre F10.7 y  $h_mF2$  son de 0.686 para la serie del atardecer, 0.625 para el mediodía y de 0.344 para la madrugada. Como era de esperarse, la menor correlación ocurre en la madrugada, mientras que la mayor se da durante el atardecer.

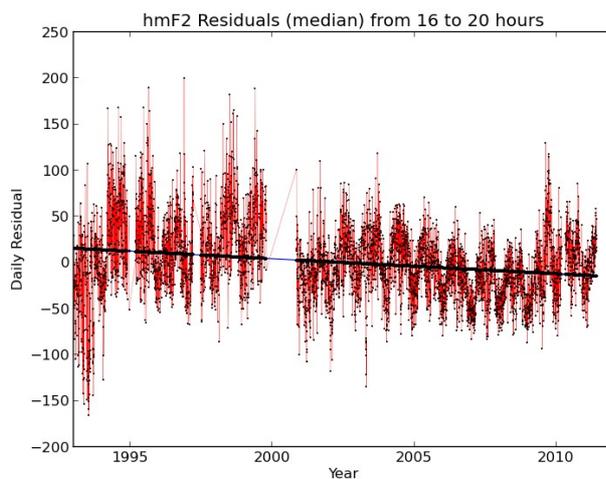
Por último, los tiempos estimados para la detección de tendencias son significativamente más cortos que los empleados en la medición de las series. A pesar de que  $T_e$  no depende explícitamente del tiempo, se espera que una serie de tiempo más larga, permita calcular un valor de  $\phi_e$  más representativo. Al parecer el intervalo de  $T_e$  es pequeño debido al valor tan alto de la tendencia.



$\omega = -1.564 \text{ km/año}$   
 $\phi = 0.675$   
 $\sigma_{\omega} = 0.075 \text{ km/año}$   
 $T_e = [4.036, 4.388] \text{ años}$



$\omega = -2.354 \text{ km/año}$   
 $\phi = 0.37$   
 $\sigma_{\omega} = 0.033 \text{ km/año}$   
 $T_e = [1.839, 1.940] \text{ años}$

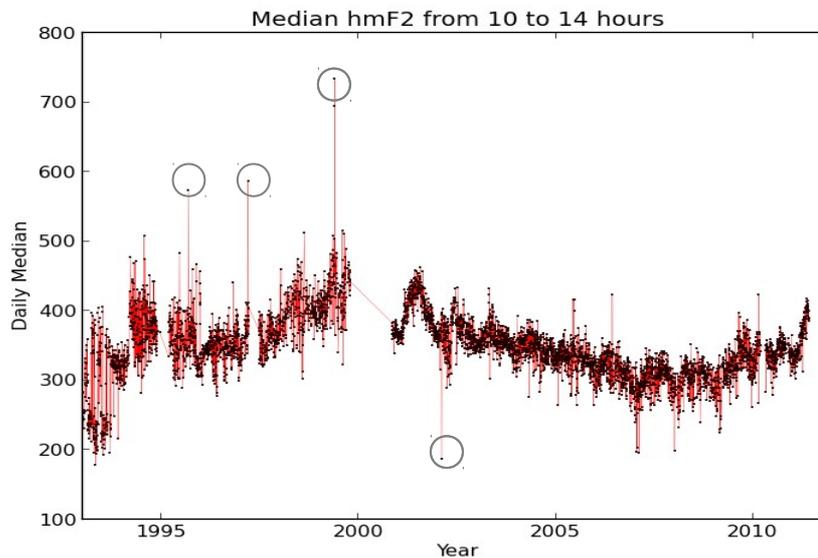


$\omega = -1.63 \text{ km/año}$   
 $\phi = 0.627$   
 $\sigma_{\omega} = 0.072 \text{ km/año}$   
 $T_e = [4.069, 4.385] \text{ años}$

Figura 5.5 Serie de residuos de  $h_mF2$  y recta de ajuste por mínimos cuadrados.

### 5.3) ANÁLISIS DE LOS PRIMEROS RESULTADOS

Además de los valores inesperadamente altos de las tendencias calculadas, existen otros indicios de que el análisis necesita un refinamiento.

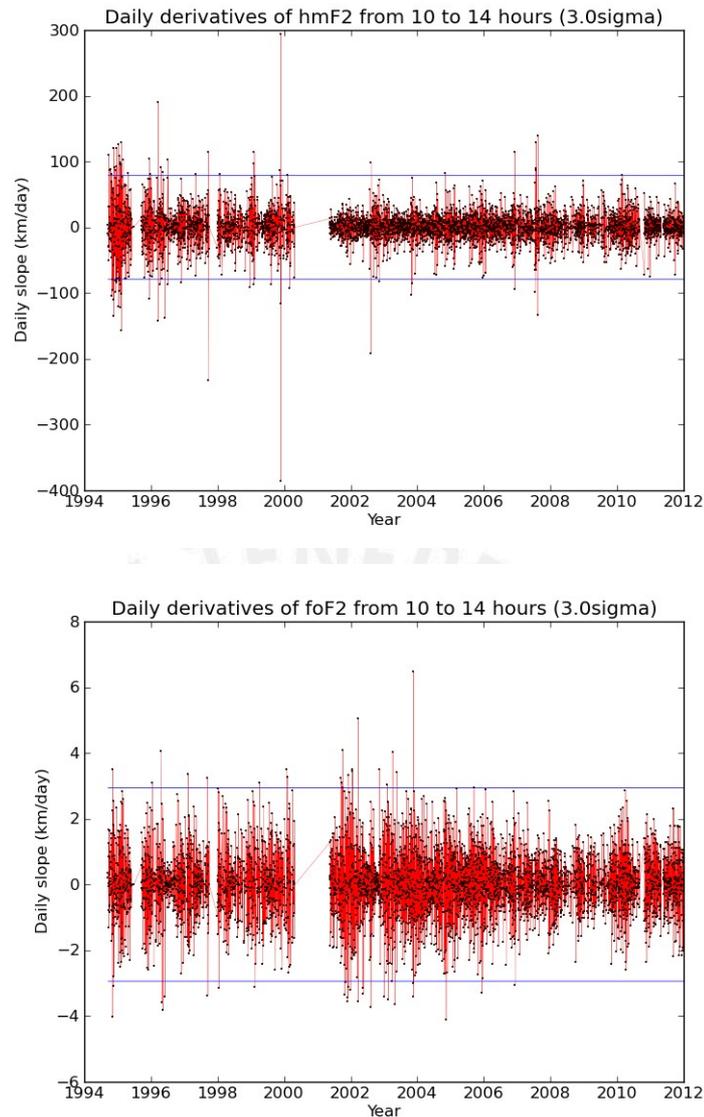


**Figura 5.6** En la gráfica se muestran sólo los “outliers” más evidentes.

Lo primero que podemos notar es la presencia de “outliers” muy fuertes (Figura 5.6). Para lidiar con estos valores, se decidió establecer una cota sobre la serie de las tasas de cambio y no sobre los valores originales, debido a que se puede esperar un crecimiento inusual en la serie siempre y cuando éste sea suave. Además, los procesos de la ionósfera en los que estamos interesados se manifiestan a largo plazo, por lo que podemos obviar las perturbaciones repentinas como corrientes de viento inusuales o precipitaciones de electrones (más aún teniendo en cuenta que es posible que estas anomalías se deban a problemas con el sistema medición o el de inversión).

Se desarrolló un script en python para calcular las series de tiempo de las derivadas de  $h_mF2$  y  $f_oF2$ , y luego se removieron los días que se presentaban variaciones de más de tres desviaciones estándar (Figura 5.7). Se espera que la correlación lineal con el modelo mejore ligeramente luego de eliminar los valores extremos.

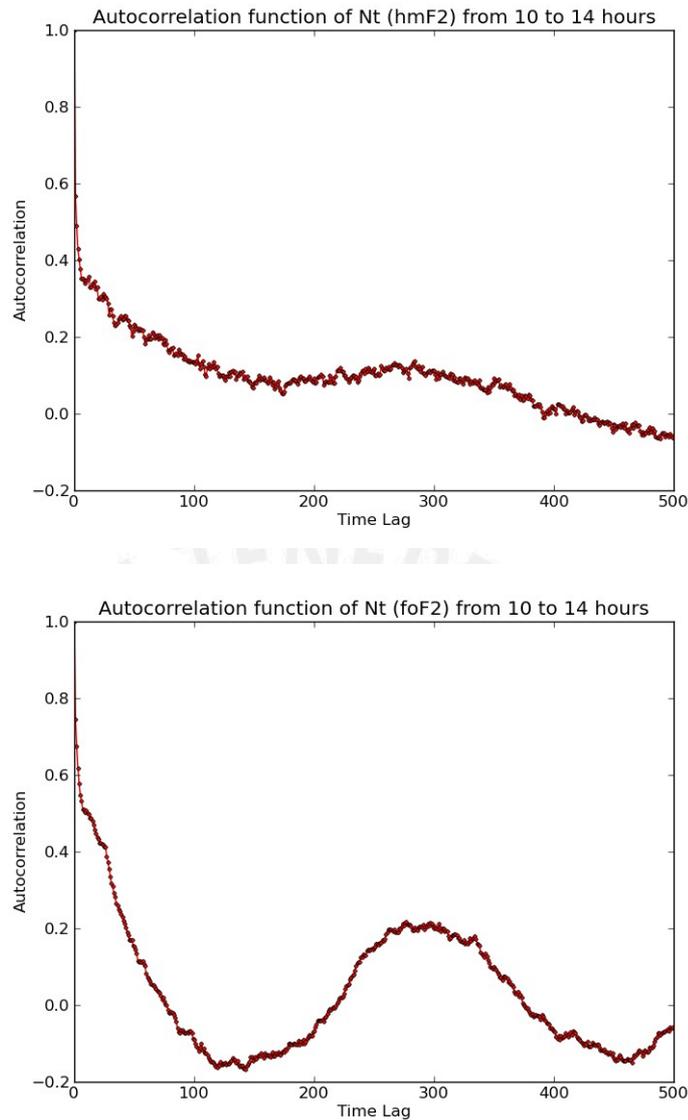
Como se comentó en la sección anterior, el valor de  $\phi$  es aún demasiado alto para un proceso AR(1). La función de autocorrelación para el error del ajuste de  $h_mF2$  o el de  $f_oF2$  (Figura 5.8) nos muestra que la serie  $N_t$  aún presenta un comportamiento significativamente distinto al que se espera.



**Figura 5.7** Series de tiempo de las derivadas de  $h_mF2$  y  $f_oF2$ , arriba y abajo respectivamente. La línea azul marca la cota de 3 sigmas.

Esto se debe probablemente a que necesitamos completar el modelo empírico propuesto, de manera que se contemplen más procesos y la serie  $N_t$  se pueda considerar como un error AR(1).

En las dos gráficas podemos apreciar una oscilación de alrededor de un año, aunque es mucho más evidente en  $f_oF2$ . Esto nos sugiere primero, que la densidad de electrones depende de un proceso más estacional en comparación con  $h_mF2$ , y que al incluir por ejemplo ésta oscilación en el modelo empírico, podríamos obtener una función de autocorrelación con un comportamiento más cercano al exponencial, es decir, “disminuir” la memoria del sistema.

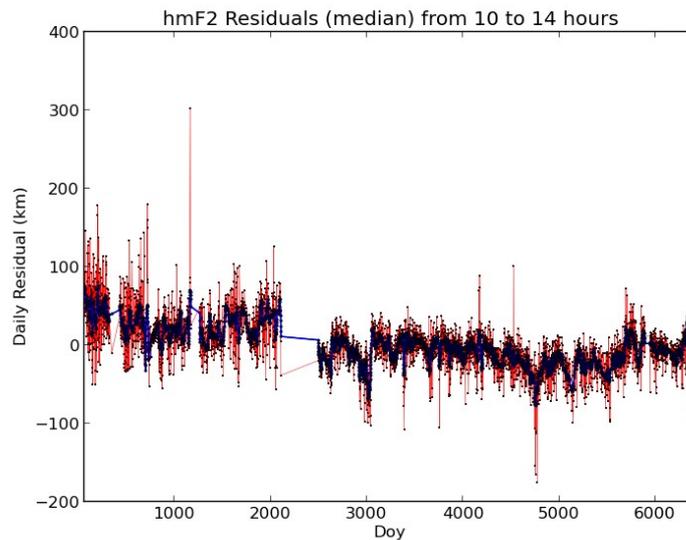


**Figura 5.8** Función de Autocorrelación de  $N_t$  al mediodía para  $h_m F2$  (arriba) y  $f_o F2$  (abajo).

Como sucede siempre que se altera un instrumento de medición, la mejora que se le hizo al equipo de transmisión y recepción en el año 2000 introdujo incertidumbre a la serie de tiempo (Weatherhead, 1998; Tiao, 1990). Además, la Figura 5.6 nos muestra series de tiempo (especialmente la correspondiente al medio día) que parecen haber sido desplazadas hacia abajo luego del vacío entre el 2000 y 2001. Para investigar este posible desplazamiento, se aplicó un filtro de Savitzky-Golay (Press, 1997) con el objetivo de eliminar las oscilaciones de frecuencia diaria sin alterar de manera significativa los picos anuales (Figura 5.9).

Podemos notar que efectivamente existe un desplazamiento de alrededor de 30 km que debe ser tomado en cuenta en el modelo. Este corrimiento probablemente se haya causado a partir de un cambio en los parámetros de medición. De no tomarse en consideración, se estarían

introduciendo tendencias ficticias en las series. Esto podría explicar el valor tan elevado de la tendencia calculada.



**Figura 5.9** Serie de  $h_mF2$  filtrada con Savitzky-Golay. El eje horizontal representa los días del año sumados consecutivamente y el eje y los residuos del modelo de  $h_mF2$ .

Por último, debido a la inconsistencia de los parámetros de medición del primer año de datos, se decidió que en el segundo análisis no se tomarán en cuenta los datos correspondientes a los meses de 1993.

El nuevo modelo empírico tendrá la siguiente forma:

$$h_m F 2_t = \mu + \omega T_t + N_t + S_t \quad (5.8)$$

Donde:

$$S_t = S(t)_{solar} + S(t)_{geo} + S(t)_{anual} + S(t)_{semi} + S(t)_{shift} \quad (5.9)$$

El término  $S_t$  representa los diferentes procesos que acompañan al decrecimiento constante descrito por la recta  $\omega T$ . Con este factor, se espera que las condiciones del modelo AR(1) para  $N_t$  se satisfagan en una mayor medida, es decir, que el sistema posea memoria de sólo un día. Las diferentes partes de  $S_t$  serán explicadas a continuación:

-  $S(t)_{solar}$ :

Estará representada por la serie de tiempo  $F10.7_t$  y modela la actividad solar.

-  $S(t)_{geo}$ :

Las perturbaciones del campo geomagnético debido al clima espacial, causan inevitablemente perturbaciones en la ionósfera que se pueden manifestar como precipitaciones de partículas o a través de la formación de campos eléctricos en la capa F2

(Buonsanto, 1999). El índice  $A_p$  surge del promedio diario de las medidas de la perturbación en el campo magnético terrestre en diferentes observatorios a nivel mundial. Existen diversos estudios que sugieren que la serie de tiempo  $A_{p_t}$  representa adecuadamente la actividad geomagnética en los modelos empíricos de la ionósfera (Bremer, 2004; Lastovicka 2006), llegando más lejos, Bremer (2004) afirma que incluirla en el modelamiento ayuda a disminuir la dependencia longitudinal de entre tendencias de diferentes regiones. Incluiremos entonces la serie de tiempo  $A_{p_t}$  desde 1994 hasta finales del 2012 (descargada de la base de datos de “Madrigal”).

-  $S(t)_{anual}$  y  $S(t)_{semi}$

La circulación de vientos en el hemisferio de verano, ocasiona un desplazamiento hacia arriba de vientos abundantes en nitrógeno molecular, haciendo que la tasa  $O/N_2$  decrezca, por lo tanto la densidad pico de electrones también disminuye. Por otro lado, en latitudes bajas, durante los solsticios se observa un mayor flujo de vientos meridionales que en los equinoccios, ésto implica un asimetría en el transporte de nitrógeno molecular en verano y en invierno. Estos dos fenómenos producen una variación anual y semianual respectivamente, en la magnitud de la densidad pico de electrones (Rishbeth, 2000). Para incluir este proceso en nuestro modelo se utilizarán dos funciones sinusoidales, una con frecuencia anual y otra semianual. Dichas funciones serán muestreadas en los días en los que se tienen datos ( $S_{a_t}$  y  $S_{s_t}$ , anual y semianual respectivamente), de tal manera que exista una correspondencia biunívoca con las demás series de tiempo.

Al no conocer la fase inicial de las funciones sinusoidales, podemos modificar las expresiones para utilizar un ajuste lineal en lugar de uno no lineal:

$$\begin{aligned} S_{a_t} &= \sin(\omega_{anual} t + \theta) = a_1 \sin(\omega_{anual} t) + a_2 \cos(\omega_{anual} t) \\ S_{s_t} &= \sin(\omega_{semi} t + \theta) = s_1 \sin(\omega_{semi} t) + s_2 \cos(\omega_{semi} t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Donde  $\omega_{anual}$ ,  $\omega_{semi}$  y  $\theta$  se refieren las frecuencias anuales, semi anuales y fase inicial respectivamente.

-  $S(t)_{shift}$

Los efectos causados por la intervención sobre el equipo de medición (principalmente el desplazamiento) serán modelado con una función escalón igual a cero antes del vacío del 2000 al 2001, e igual a uno para el resto de la serie (Weatherhead 1998, Tiao 1990). Si  $T_o$  representa el instante en la serie en la que el instrumento de medición fue alterado, la serie que modele el desplazamiento estará dada por:

$$\delta_t = \delta(t - T_o) = \begin{cases} 0, & t < T_o \\ 1, & t \geq T_o \end{cases} \quad (5.12)$$

El modelo para  $h_m F2$  tendrá entonces la forma:

$$h_m F2_t = \mu + \omega T_t + N_t + x_1 F10.7_t + x_2 Ap_t + x_3 Sa_t + x_4 Ss_t + x_5 \delta_t \quad (5.13)$$

Los coeficientes ( $\mu$ ,  $\omega$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , etc) serán determinados utilizando mínimos cuadrados. Este modelo es muy similar al que empleó Ulich (Lastovicka, 2006), con la diferencia de que en dicho estudio no se utilizó la serie de  $Ap_t$ .

La expresión planteada, se utilizará para modelar también las series de  $f_o F2$  y  $N_m F2$ . Esto se debe a que estamos trabajando con procesos que en teoría afectan a los tres parámetros, aunque se desconoce la forma o expresión matemática que los relaciona. Como primera aproximación tomaremos entonces la superposición lineal de los procesos.

Como se había comentado anteriormente, no se espera que este modelo logre un ajuste exacto con los datos, ya que las relaciones entre estos procesos son muy complejas y difíciles de modelar. Lo que se pretende lograr es modelar el comportamiento a largo plazo, tratando de incluir la mayor cantidad de fenómenos presentes teniendo en cuenta la física de este escenario.

Otro punto importante, es el de la estimación del error que viene con la modificación de la ionosonda. En el capítulo 3 se mostró que el error asociado a la tendencia del nuevo modelo empírico tiene la forma:

$$\sigma_\omega = \frac{\sigma_N}{T^{3/2}} \sqrt{\frac{(1+\phi)}{(1-\phi)[1-3\tau(1-\tau)]}}, \quad \text{con } \tau = \frac{T_o - 1}{T} \quad (5.14)$$

Donde  $T$  es el número de datos y  $\tau$  la fracción de la serie de tiempo previa a la modificación del equipo. Al incluir el nuevo término, el error relativo a la tendencia estimada puede aumentar hasta en un factor de dos ya que:

$$0 < \tau < 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{1}{1-3\tau(1-\tau)}} < 2 \quad (5.15)$$

Esto sucedería si la modificación del instrumento ocurre en la mitad de la serie de tiempo. Por otro lado, el error sería mínimo si es que la alteración sucediera en alguno de sus extremos.

Por último, como se mostró en el capítulo 2, los cambios naturales en la configuración de las líneas del campo magnético terrestre deben ser tomadas en cuenta, de no ser así, el valor

calculado de  $\omega$  estaría representando no sólo la tendencia por contracción de la termósfera sino también la tendencia en la líneas de campo.

Cnossen (2008) realizó algunas simulaciones para ver el efecto de las tendencia en las líneas de campo magnético sobre las variaciones de  $h_m F2$  y  $f_o F2$ . Elías (2009) por otro lado, se valió de estimaciones sencillas para calcular estos mismos valores, llegando a resultados muy similares. En el capítulo 2 se derivaron también las expresiones para estimar las tendencias en  $h_m F2$ ,  $f_o F2$  y  $N_m F2$  causadas por las variaciones en el campo magnético terrestre:

$$\Delta h_m F2 = \frac{H^2 \Delta W}{D_p}, \frac{\Delta N_m F2}{N_m F2} = 0.75 \frac{H \Delta W}{D_p}, \frac{\Delta f_o F2}{f_o F2} = 0.35 \frac{H \Delta W}{D_p} \quad (5.16)$$

Donde,

$$W = U_x \cos(\delta) \sin(I) \cos(I) \quad (5.17)$$

$U_x$  representa los vientos meridionales, mientras que  $\delta$  (declinación) e  $I$  (inclinación) son los ángulos que hacen las líneas del campo magnético con el norte geográfico y el horizonte respectivamente. La tendencia en  $h_m F2$  está dada en km/año, mientras que las de  $f_o F2$  en porcentaje de cambio anual. Los valores de temperatura y densidad necesarios para el cálculo de la escala de altura  $H$  y coeficiente de difusión  $D_p$ , se obtuvieron del modelo de Hedin MSIS86 (Hedin, 1987), los vientos meridionales de HWM93 y los ángulos de inclinación y declinación de la IGRF (“International Geomagnetic Reference Field”). La frecuencia de colisión (necesaria para el cálculo del coeficiente de difusión) se tomó como  $4 \times 10^{-17} T^{0.5} n(O)$  (Salah, 1993). Los resultados de Elías se muestran en la Tabla 5.1.

	Junio	Septiembre	Diciembre
$h_m F2$ (km/año)	-0.2	-0.1	-0.1
$f_o F2$ (%/año)	-0.1	-0.1	-0.1

**Tabla 5.1** Tendencias estimadas a partir de variaciones del campo magnético terrestre (Elías, 2009).

Los cálculos fueron realizados para Junio, Septiembre y Diciembre, debido a la variabilidad estacional de los vientos meridionales.

#### 5.4) SEGUNDA APROXIMACIÓN

El método propuesto por Bremer consiste en extraer del modelo empírico, los términos correspondientes a los fenómenos que no sean el de contracción por el enfriamiento global propuesto por Roble.

Luego de calcular los coeficientes de ajuste, se restan de la serie de tiempo medida, las series de tiempo modeladas para finalmente obtener la serie de residuos. De acuerdo al supuesto inicial, es ésta última serie de residuos la que puede ser representada como una recta y un error autorregresivo en la medición.

Sin embargo, siguiendo el planteamiento de Bremer, al realizar el primer ajuste no se toma en cuenta el término de la tendencia lo que podría disminuir el coeficiente de correlación con la recta planteada. Para evaluar la capacidad de este método, se ajustaron los coeficientes del modelo para dos casos diferentes:

- *Método de Bremer*

Se realiza un ajuste de mínimos cuadrados asumiendo que el parámetro (en este caso  $h_m F_2$ ) está modelado por  $S(t)$  y que en el residuo correspondiente a éste ajuste se encuentra implícita la contracción por el enfriamiento global:

$$\Delta h_m F_2 = h_m F_2 - S(t) \Rightarrow \Delta h_m F_2 = \mu + \omega T_t + \delta U_t + N_t \quad (5.18)$$

La tendencia buscada estará dada por  $\omega$ .

- *Método Directo*

Se realiza el ajuste directamente, utilizando el modelo propuesto:

$$h_m F_2 = \mu + \omega T_t + N_t + x_1 F_{10.7_t} + x_2 A p_t + x_3 S a_t + x_4 S s_t + x_5 U_t \quad (5.19)$$

Se espera que tener en cuenta el término de contracción de la termósfera en el ajuste, aumente la correlación lineal y disminuya la función de autocorrelación.

Luego de realizar el análisis, se pueden comparar los valores estadísticos obtenidos mediante los dos métodos y evaluar cuál de los dos se ajusta mejor a los supuestos.

Existe otra razón para utilizar el enfoque de Bremer. La expresión calculada para la incertidumbre en la tendencia:

$$\sigma_\omega = \frac{\sigma_N}{T^{3/2}} \sqrt{\frac{(1+\phi)}{(1-\phi)[1-3\tau(1-\tau)]}}, \quad (5.20)$$

presupone un modelo del tipo:

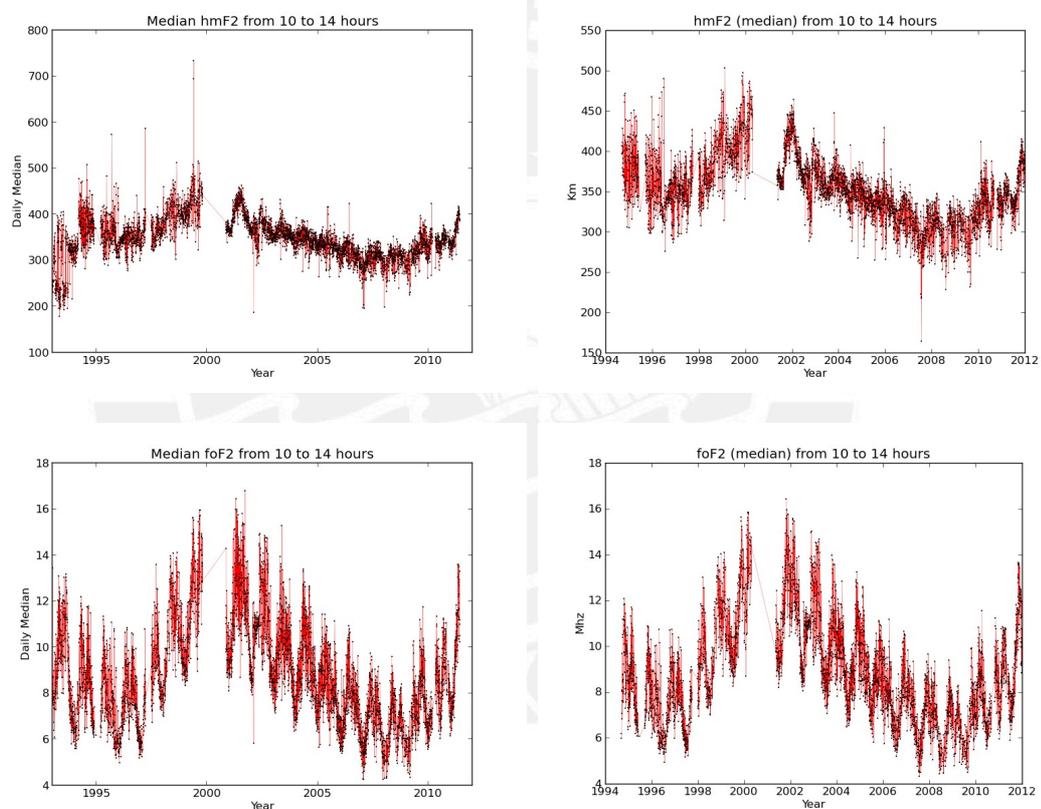
$$Y_t = \mu + \omega X_t + \delta U_t + N_t \quad (5.21)$$

En el método directo se utilizará un modelo más complejo para el cual debería haber una

mayor incertidumbre asociada (Ulich, 2003). A pesar de ello, Weatherhead (2000) hizo uso de un modelo similar al planteado en el método directo con la misma expresión para  $\sigma_{\omega}$  argumentando que el cambio causado era mínimo.

En este trabajo, al igual que en el de Weatherhead, se utilizará la expresión anterior para el método de directo, pero teniendo en cuenta que será una aproximación adecuada solamente si es que el modelo no aumenten la incertidumbre de manera significativa.

Es importante recordar que el análisis se va a realizar sobre las series de tiempo ya filtradas (Figura 5.9).



**Figura 5.9** Las series de tiempo del medio día de  $h_mF2$  (arriba) y  $f_oF2$  (abajo) antes (izquierda) y después (derecha) de la extracción de valores extremos y de la porción de la serie de tiempo previa a 1994.

Una forma de evaluar el peso de cada uno de los términos del modelo en el ajuste podría ser construyendo diferentes modelos formados a partir de diferentes términos de  $S(t)$ . Para esto, se van a utilizar las siguientes abreviaturas: “A” para  $A_p$ , “C” para los ciclos anuales y semi anuales, “S” para la función escalón y “N” cuando únicamente se utilice la serie de F10.7:

$$\begin{aligned}
 S_N(t) &= x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_S(t) &= x_U U_t + x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_A(t) &= x_{Ap} Ap_t + x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_C(t) &= x_{Sa} Sa_t + x_{Ss} Ss_t + x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_{AS}(t) &= x_{Ap} Ap_t + x_U U_t + x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_{CS}(t) &= x_{Sa} Sa_t + x_{Ss} Ss_t + x_U U_t + x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_{AC}(t) &= x_{Ap} Ap_t + x_{Sa} Sa_t + x_{Ss} Ss_t + x_{F10.7} F 10.7_t \\
 S_{ACS}(t) &= x_{Ap} Ap_t + x_{Sa} Sa_t + x_{Ss} Ss_t + x_U U_t + x_{F10.7} F 10.7_t
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Al realizar el ajuste con los diferentes modelos, podemos comparar los parámetros estadísticos obtenidos en cada caso para evaluar el peso de cada término a la hora de modelar los datos.

En las figuras 5.10, 5.11 y 5.12 se muestran las series de tiempo que van a ser procesadas. La serie de tiempo de la densidad máxima de electrones ( $N_m F2$ , en unidades de  $10^{12} \text{ m}^{-3}$ ) se calculó a partir de la de  $f_o F2$  haciendo uso de la fórmula calculada en el capítulo 2:

$$f_p = \sqrt{80.6 N_e} \Rightarrow N_m F2 = \frac{f_o F2^2}{80.6} \tag{5.23}$$

A pesar de que la relación entre  $f_o F2$  y  $N_m F2$  es cuadrática, se utilizará el mismo modelo para el análisis, debido a dos motivos. Primero, el cálculo de la incertidumbre realizado, se aplica únicamente al modelo lineal. Segundo, dado que las variaciones son lentas, se espera la tendencia calculada no sea muy diferente a la tendencia real. La exactitud de la aproximación de  $N_m F2$  va a depender de qué tan bien el término cuadrático pueda ser representado por una función lineal.

Se construyeron tablas para mostrar los resultados de las tendencias, incertidumbres y parámetros estadísticos para los diferentes casos. En cada tabla se puede apreciar en la esquina superior izquierda, el intervalo del día en el cual se hace el análisis. En la primera fila se indica si los valores corresponden al modelo de Bremer o al modelo directo y en la segunda se especifican los términos que fueron utilizados para el ajuste lineal (A,C,S o N).

En la primera columna de la izquierda se muestran los diferentes parámetros a analizar ( $h_m F2$ ,  $f_o F2$  y  $N_m F2$ ) y los valores que se van a calcular en cada caso siguiendo el siguiente orden: tendencia hallada  $\omega$ , incertidumbre en la medición de la tendencia  $\sigma_\omega$ , correlación lineal entre el modelo y los datos  $\rho$ , autocorrelación del error del ajuste  $\phi$ , desviación estándar del error del ajuste  $\sigma_N$  y por último los valores mínimo  $T_{\min}$  y máximo  $T_{\max}$  del intervalo de años estimado para medir la tendencia calculada.

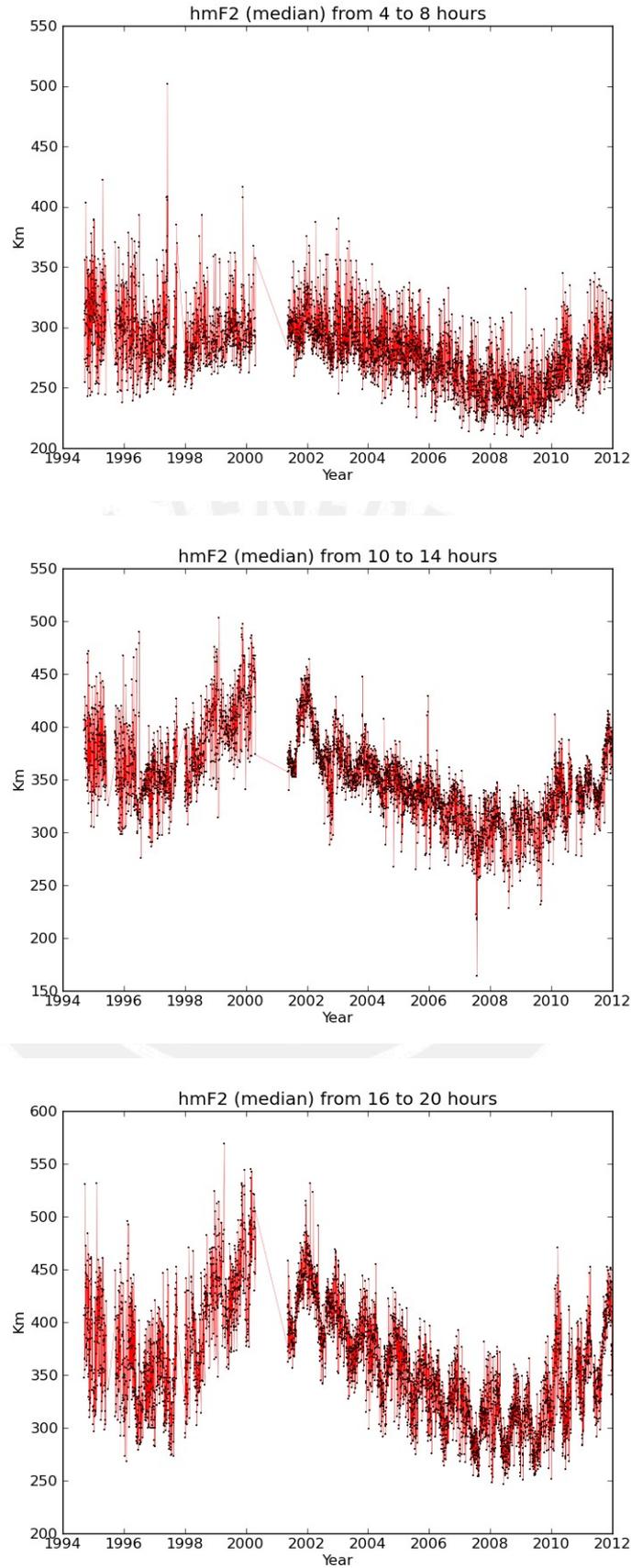


Figura 5.10 Series de  $h_mF_2$ . Arriba: durante el amanecer. Medio: mediodía. Abajo: atardecer.

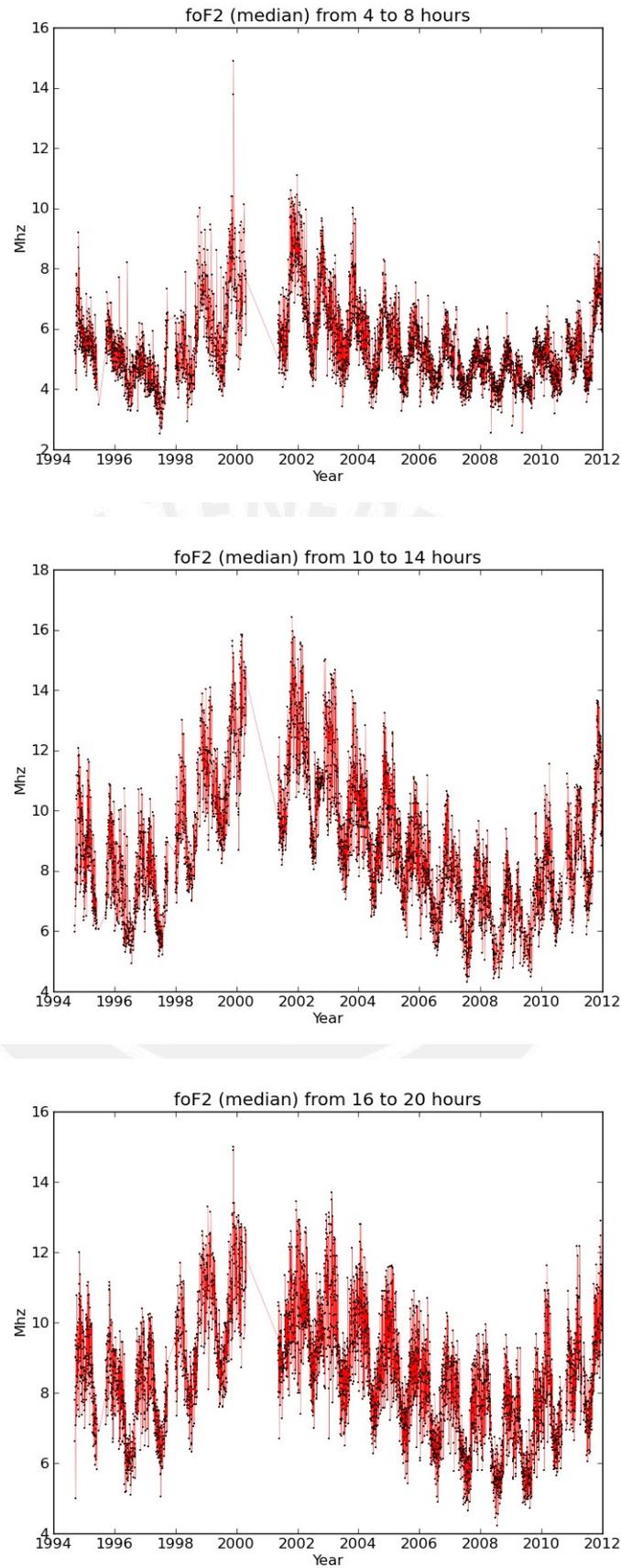


Figura 5.11 Series de  $f_oF_2$ . Arriba: durante el amanecer. Medio: durante el mediodía. Abajo: durante el atardecer.

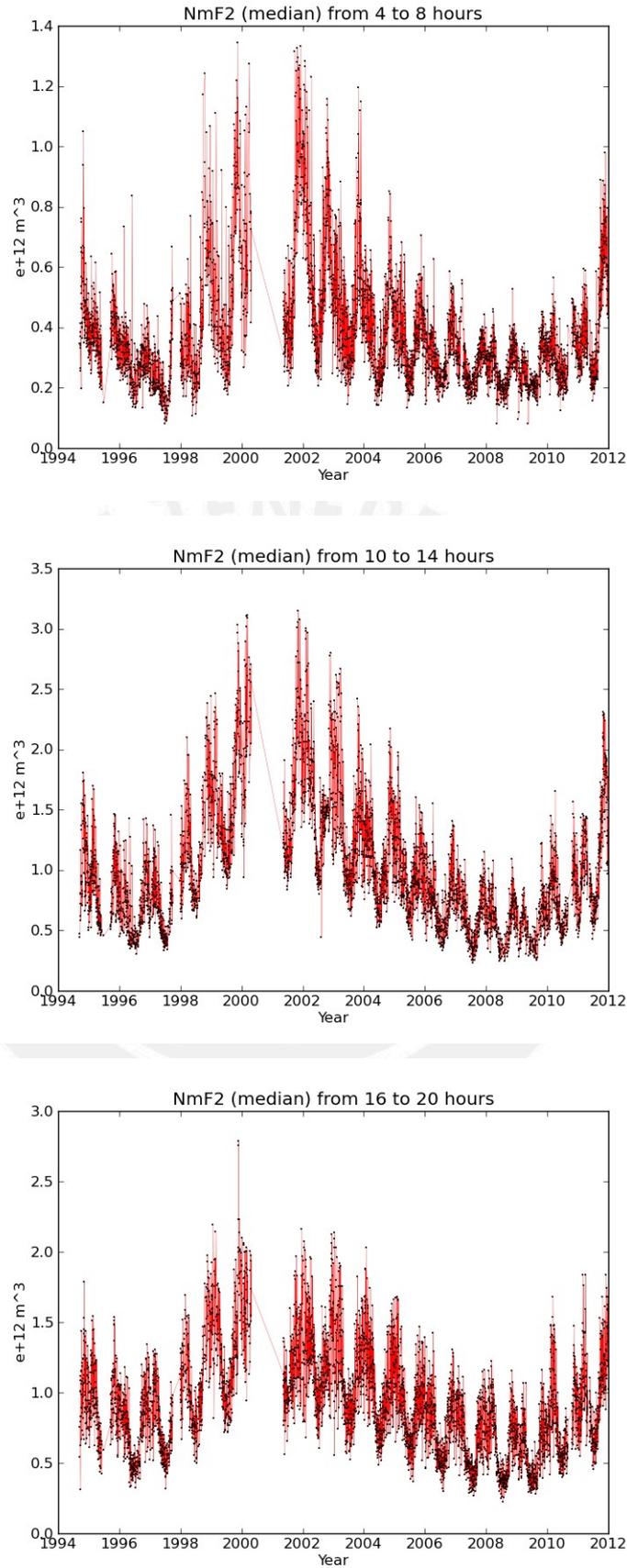


Figura 5.12 Series de  $N_mF2$ . Arriba: durante el amanecer. Medio: mediodía. Abajo: atardecer.

4-8h	METODO DE BREMER								METODO DIRECTO							
	ACS	AS	CS	S	AC	A	C	N	ACS	AS	CS	S	AC	A	C	N
$h_m F2$																
$\omega$	<b>-1.938</b>	<b>-2.027</b>	<b>-2.259</b>	<b>-2.332</b>	<b>-2.300</b>	<b>-2.307</b>	<b>-2.432</b>	<b>-2.434</b>	<b>-2.284</b>	<b>-2.377</b>	<b>-2.570</b>	<b>-2.636</b>	<b>-2.415</b>	<b>-2.415</b>	<b>-2.529</b>	<b>-2.511</b>
$\sigma_\omega$	0.056	0.060	0.058	0.061	0.056	0.060	0.058	0.061	0.056	0.059	0.058	0.061	0.056	0.060	0.058	0.061
$\rho$	0.526	0.484	0.460	0.417	0.475	0.441	0.430	0.398	0.630	0.605	0.612	0.590	0.630	0.605	0.612	0.590
$\phi$	0.356	0.390	0.376	0.402	0.358	0.391	0.377	0.402	0.355	0.388	0.371	0.397	0.356	0.388	0.371	0.397
$\sigma_N$	22.378	22.935	22.788	23.253	22.412	22.955	22.795	23.256	22.258	22.817	22.678	23.150	22.262	22.817	22.678	23.153
$T_{min}$	2.691	2.722	2.497	2.525	2.407	2.500	2.378	2.454	2.402	2.437	2.275	2.312	2.315	2.411	2.305	2.388
$T_{max}$	2.845	2.884	2.643	2.677	2.545	2.649	2.517	2.603	2.539	2.581	2.407	2.451	2.448	2.555	2.440	2.532
$f_m F2$																
$\omega$	<b>-0.012</b>	<b>-0.003</b>	<b>-0.019</b>	<b>-0.011</b>	<b>0.000</b>	<b>-0.002</b>	<b>-0.003</b>	<b>-0.006</b>	<b>-0.015</b>	<b>-0.003</b>	<b>-0.023</b>	<b>-0.013</b>	<b>0.000</b>	<b>-0.002</b>	<b>-0.003</b>	<b>-0.006</b>
$\sigma_\omega$	0.002	0.003	0.002	0.004	0.002	0.003	0.002	0.004	0.002	0.003	0.002	0.004	0.002	0.003	0.002	0.004
$\rho$	0.820	0.674	0.812	0.662	0.821	0.674	0.815	0.663	0.822	0.674	0.816	0.663	0.821	0.674	0.815	0.663
$\phi$	0.388	0.633	0.412	0.648	0.391	0.633	0.416	0.648	0.390	0.633	0.413	0.648	0.390	0.633	0.416	0.648
$\sigma_N$	7.731	9.948	0.742	0.960	0.733	0.948	0.744	0.960	0.731	0.948	0.742	0.960	0.733	0.948	0.744	0.960
$T_{min}$	8.274	34.232	6.249	13.324	219.934	41.201	21.731	20.880	7.199	30.584	5.551	12.075	213.429	40.089	21.295	20.520
$T_{max}$	8.766	37.112	6.632	14.475	233.032	44.667	23.066	22.684	7.627	33.158	5.891	13.119	226.140	43.462	22.603	22.293
$N_m F2$																
$\omega$	<b>-0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>-0.003</b>	<b>-0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>-0.001</b>	<b>-0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>-0.003</b>	<b>-0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>-0.001</b>	<b>-0.001</b>
$\sigma_\omega$	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001
$\rho$	0.806	0.672	0.797	0.660	0.806	0.672	0.799	0.661	0.807	0.672	0.800	0.662	0.806	0.672	0.799	0.661
$\phi$	0.417	0.626	0.439	0.640	0.419	0.626	0.441	0.640	0.418	0.626	0.439	0.640	0.419	0.626	0.441	0.640
$\sigma_N$	0.112	0.140	0.113	0.142	0.112	0.140	0.114	0.142	0.112	0.140	0.113	0.142	0.112	0.140	0.114	0.142
$T_{min}$	9.515	44.794	6.683	13.205	154.770	45.746	21.859	20.964	8.380	40.409	6.022	12.098	150.205	44.516	21.439	20.622
$T_{max}$	10.103	48.529	7.107	14.333	164.346	49.561	23.250	22.756	8.898	43.780	6.404	13.132	159.499	48.230	22.809	22.384

Tabla 5.2 Resultados obtenidos del análisis realizado sobre las series del intervalo de 4 a 8 horas.

Las tendencias halladas se encuentran resaltadas en negrita. Vemos que que los resultados pueden a llegar a ser muy variados para los diferentes términos utilizados en el modelo. Es importante indicar que los valores fueron truncados en el tercer decimal.

En la tabla correspondiente al intervalo de 4 a 8 horas (Tabla 5.2) hay varias columnas de resultados expresados con letra más clara. Estos valores han sido rechazados del análisis, ya que el tiempo esperado para medir la tendencia calculada ( $T_{min}$ ,  $T_{max}$ ) supera el tiempo real de medición, lo que indica principalmente que la incertidumbre asociada a la tendencia es demasiado alta como para que el valor sea significativo. A pesar de la consistencia en los valores de  $\omega$ , la Tabla 5.2 es la única que contiene valores de este tipo.

Las tablas correspondientes a los intervalos de 10 a 14 y de 16 a 20 horas (Tablas 5.3 y 5.4), los tiempos de medición estimados se encuentran dentro de lo esperado, lo que sugiere que la tendencia calculada es significativamente mayor que el error asociado. Por otro lado, se muestra una discrepancia bastante visible entre los resultados obtenidos para la tendencia de  $h_m F2$ . Los valores de  $\omega$  calculados sin tomar en cuenta la serie  $U_t$ , son hasta cinco veces mayores que los hallados utilizando  $U_t$  en el modelo.

Ya que “N” denota el caso en el que sólo tomamos en cuenta la serie de tiempo de F10.7, si comparamos los valores de correlación lineal obtenidos en los primeros resultados (entre F10.7 y  $h_m F2$ ) con los correspondientes a la columna “N” de la tabla, vemos que la remoción

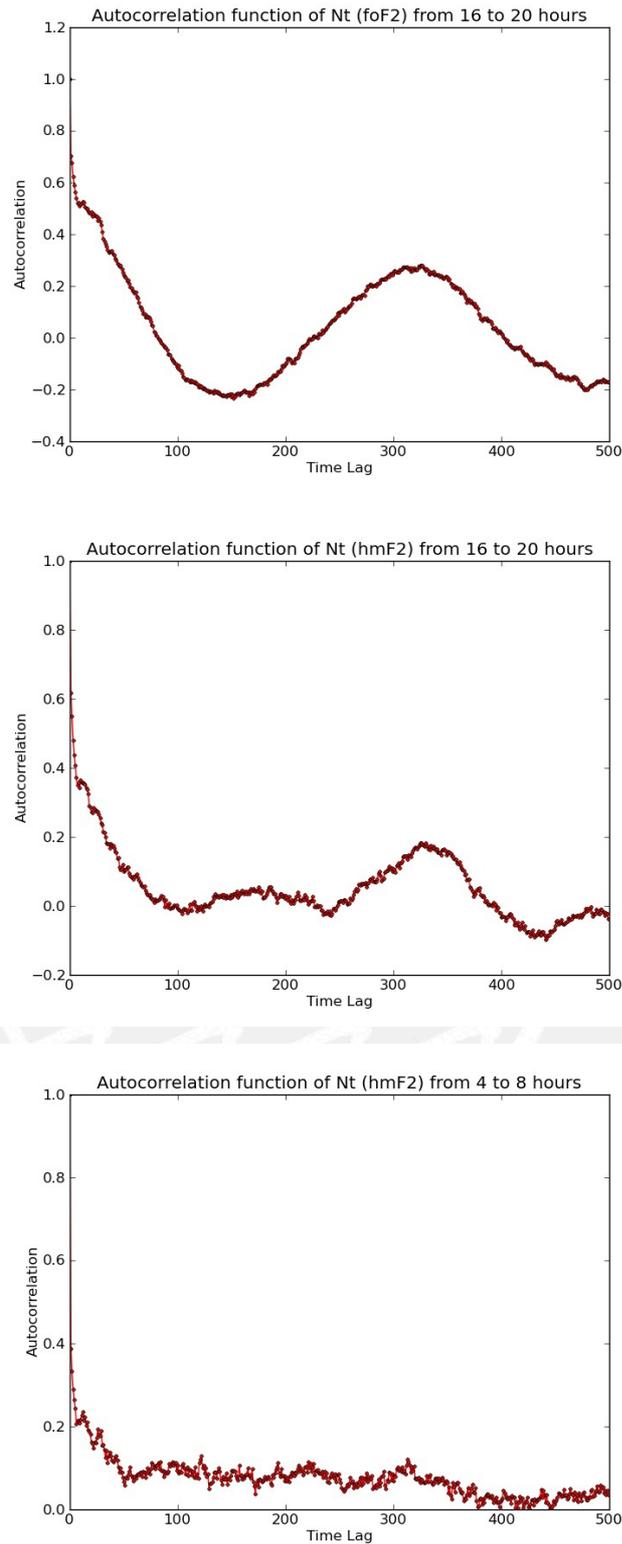
de “outliers” mejoró el ajuste: en el primer análisis se obtuvo una correlación de 0.686 para el atardecer, 0.625 para el medio día y 0.344 para el amanecer; mientras que en el segundo, utilizando el método de Bremer, se calcularon valores de 0.718 para el atardecer, 0.656 para el medio día y de 0.398 para el amanecer.

10-14h	METODO DE BREMER								METODO DIRECTO							
	ACS	AS	CS	S	AC	A	C	N	ACS	AS	CS	S	AC	A	C	N
$h_m F2$																
$\omega$	-0.444	-0.329	-0.607	-0.500	-2.852	-2.866	-2.922	-2.940	-0.463	-0.330	-0.596	-0.472	-2.979	-2.982	-3.008	-3.014
$\sigma_o$	0.073	0.079	0.074	0.079	0.084	0.090	0.084	0.090	0.073	0.079	0.074	0.079	0.083	0.089	0.083	0.089
$\rho$	0.798	0.785	0.795	0.782	0.681	0.661	0.677	0.656	0.800	0.786	0.798	0.784	0.775	0.758	0.775	0.757
$\phi$	0.488	0.516	0.491	0.520	0.542	0.570	0.542	0.570	0.488	0.517	0.491	0.520	0.539	0.568	0.538	0.567
$\sigma_N$	23.673	24.365	23.748	24.451	25.040	25.838	25.011	25.811	23.640	24.349	23.731	24.450	24.858	25.675	24.855	25.706
$T_{min}$	8.334	10.634	6.800	8.089	2.625	2.740	2.579	2.691	8.100	10.606	6.880	8.401	2.530	2.652	2.514	2.634
$T_{max}$	8.905	11.391	7.268	8.668	2.819	2.951	2.770	2.898	8.655	11.363	7.353	9.002	2.716	2.855	2.699	2.836
$f_p F2$																
$\omega$	-0.032	-0.021	-0.043	-0.033	-0.022	-0.023	-0.027	-0.028	-0.038	-0.024	-0.049	-0.037	-0.023	-0.024	-0.028	-0.029
$\sigma_o$	0.004	0.007	0.004	0.007	0.004	0.007	0.004	0.007	0.004	0.007	0.004	0.007	0.004	0.006	0.004	0.007
$\rho$	0.845	0.749	0.838	0.741	0.847	0.749	0.841	0.742	0.849	0.751	0.845	0.745	0.848	0.751	0.844	0.745
$\phi$	0.594	0.738	0.606	0.745	0.594	0.738	0.607	0.746	0.596	0.739	0.606	0.746	0.596	0.739	0.607	0.746
$\sigma_N$	1.126	1.406	1.140	1.420	1.127	1.406	1.142	1.420	1.125	1.405	1.139	1.420	1.126	1.405	1.141	1.420
$T_{min}$	6.896	12.549	5.831	9.519	8.877	11.774	7.930	10.416	6.157	11.429	5.296	8.796	8.649	11.497	7.800	10.267
$T_{max}$	7.446	13.865	6.306	10.536	9.586	13.009	8.576	11.528	6.649	12.631	5.727	9.736	9.341	12.707	8.436	11.365
$N_m F2$																
$\omega$	-0.008	-0.005	-0.010	-0.007	-0.005	-0.005	-0.006	-0.006	-0.009	-0.006	-0.011	-0.008	-0.005	-0.005	-0.006	-0.006
$\sigma_o$	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.002
$\rho$	0.834	0.745	0.829	0.739	0.836	0.745	0.832	0.740	0.838	0.747	0.835	0.743	0.838	0.747	0.835	0.743
$\phi$	0.587	0.720	0.595	0.726	0.587	0.720	0.596	0.726	0.588	0.721	0.595	0.726	0.588	0.721	0.596	0.726
$\sigma_N$	0.270	0.329	0.272	0.331	0.270	0.329	0.272	0.331	0.270	0.329	0.272	0.331	0.270	0.330	0.272	0.331
$T_{min}$	6.857	12.103	5.918	9.498	9.272	11.914	8.353	10.652	6.135	11.028	5.394	8.803	9.040	11.643	8.224	10.511
$T_{max}$	7.400	13.327	6.392	10.471	10.006	13.119	9.024	11.743	6.622	12.145	5.826	9.705	9.758	12.823	8.884	11.588

Tabla 5.3 Resultados obtenidos del análisis realizado sobre las series del intervalo de 10 a 14 horas.

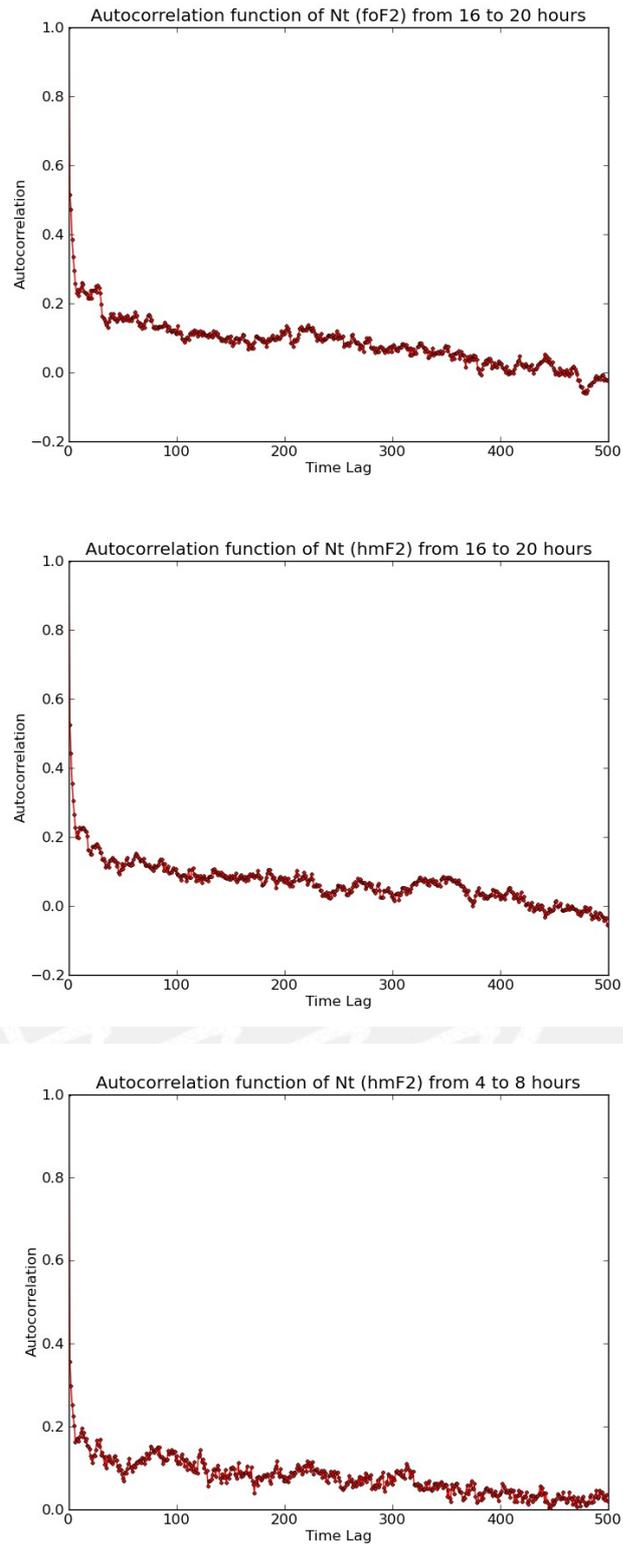
16-20h	METODO DE BREMER								METODO DIRECTO							
	ACS	AS	CS	S	AC	A	C	N	ACS	AS	CS	S	AC	A	C	N
$h_m F2$																
$\omega$	-0.509	-0.481	-0.680	-0.699	-2.445	-2.526	-2.530	-2.636	-0.522	-0.479	-0.669	-0.678	-2.587	-2.662	-2.632	-2.729
$\sigma_o$	0.084	0.107	0.084	0.109	0.089	0.113	0.089	0.114	0.083	0.107	0.084	0.109	0.088	0.112	0.088	0.113
$\rho$	0.822	0.772	0.820	0.769	0.779	0.722	0.777	0.718	0.824	0.773	0.822	0.771	0.815	0.763	0.814	0.762
$\phi$	0.524	0.615	0.528	0.622	0.547	0.632	0.549	0.637	0.525	0.617	0.528	0.622	0.547	0.634	0.548	0.636
$\sigma_N$	29.878	33.390	29.955	33.525	30.631	34.143	30.641	34.198	29.852	33.373	29.944	33.525	30.488	34.017	30.535	34.107
$T_{min}$	8.953	10.910	7.430	8.590	3.265	3.730	3.200	3.649	8.806	10.968	7.501	8.766	3.134	3.600	3.105	3.556
$T_{max}$	9.572	11.779	7.947	9.282	3.499	4.035	3.430	3.950	9.416	11.844	8.023	9.473	3.358	3.896	3.327	3.848
$f_p F2$																
$\omega$	-0.038	-0.039	-0.045	-0.047	-0.033	-0.037	-0.037	-0.041	-0.046	-0.047	0.054	-0.055	-0.035	-0.039	-0.039	-0.043
$\sigma_o$	0.003	0.005	0.003	0.005	0.003	0.005	0.003	0.005	0.002	0.005	0.003	0.005	0.002	0.005	0.003	0.005
$\rho$	0.774	0.591	0.766	0.579	0.776	0.592	0.770	0.583	0.783	0.603	0.779	0.597	0.783	0.603	0.778	0.597
$\phi$	0.513	0.702	0.522	0.707	0.513	0.702	0.523	0.707	0.515	0.703	0.522	0.707	0.515	0.703	0.523	0.708
$\sigma_N$	1.027	1.316	1.035	1.324	1.027	1.316	1.036	1.324	1.026	1.315	1.034	1.323	1.026	1.315	1.035	1.323
$T_{min}$	5.316	7.488	4.759	6.633	5.800	7.714	5.445	7.216	4.641	6.596	4.230	5.948	5.604	7.479	5.317	7.071
$T_{max}$	5.678	8.188	5.088	7.260	6.195	8.434	5.821	7.898	4.958	7.214	4.522	6.510	5.987	8.180	5.684	7.740
$N_m F2$																
$\omega$	-0.008	-0.008	-0.010	-0.010	-0.007	-0.008	-0.008	-0.008	-0.010	-0.010	-0.011	-0.012	-0.007	-0.007	-0.008	-0.009
$\sigma_o$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$\rho$	0.760	0.589	0.753	0.578	0.763	0.591	0.758	0.583	0.769	0.601	0.766	0.596	0.770	0.600	0.765	0.596
$\phi$	0.515	0.689	0.523	0.693	0.515	0.689	0.523	0.693	0.516	0.690	0.522	0.693	0.517	0.690	0.523	0.694
$\sigma_N$	0.225	0.281	0.226	0.283	0.225	0.281	0.227	0.283	0.225	0.281	0.226	0.282	0.225	0.281	0.226	0.283
$T_{min}$	5.404	7.345	4.875	6.570	6.127	7.834	5.754	7.344	4.706	6.454	4.322	5.879	5.921	7.596	5.620	7.199
$T_{max}$	5.774	8.016	5.212	7.175	6.547	8.549	6.153	8.021	5.029	7.046	4.622	6.421	6.328	8.291	6.010	7.862

Tabla 5.4 Resultados obtenidos del análisis realizado sobre las series del intervalo de 16 a 20 horas.



**Figura 5.13** Arriba: Método directo, términos “AS”,  $f_oF2$  (atardecer). Medio: Método directo, términos “AS”,  $h_mF2$  (atardecer). Abajo: Método directo, términos “AS”,  $h_mF2$  (amanecer).

Los valores de  $\phi$  son claramente distintos para los diferentes modelos en los tres intervalos. Sin embargo, hay una diferencia importante entre los modelos que contienen  $Sa_t$  y  $Ss_t$ , de los

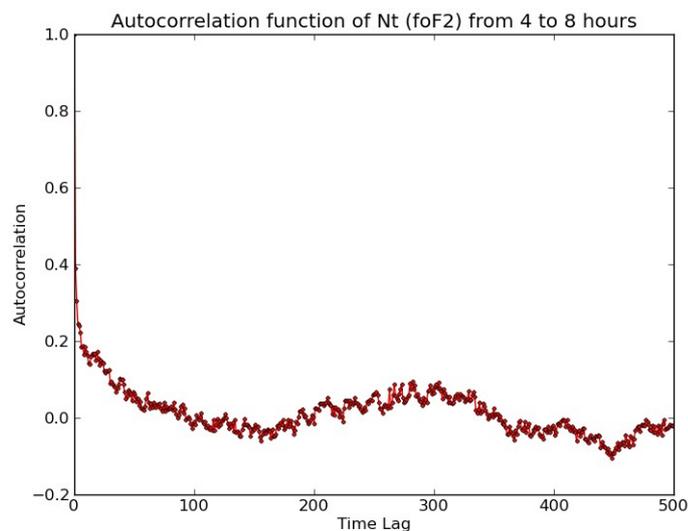


**Figura 5.14** Arriba: Método directo, términos “ACS”,  $f_0F2$  (atardecer). Medio: Método directo, términos “ACS”,  $h_mF2$  (atardecer). Abajo: Método directo, términos “ACS”,  $h_mF2$  (amanecer).

que no. En la Figura 5.13, se presentan tres de los diferentes casos que se observaron para la función de autocorrelación de  $N_t$ .

La gráfica de arriba muestra el caso más frecuente, es decir, la presencia de ciclos anuales que se hacen evidentes al no haber sido extraídos de la serie de tiempo. La gráfica del medio representa una minoría de casos, en los que se puede apreciar también un ciclo semi anual. Por último, en la gráfica de abajo se muestra el único caso en el que los ciclos no pueden ser observados a simple vista (aunque un análisis más detallado muestra que si están presentes).

La teoría nos dice que para un proceso AR(1), la función de autocorrelación debería decaer exponencialmente. En la Figura 5.14 se presentan las funciones de autocorrelación de los casos presentados en la Figura 5.13, pero incluyendo los términos  $Sa_t$  y  $Ss_t$  en el modelamiento. Los ciclos anuales y semi anuales desaparecen en los tres casos. Sin embargo, existen algunos casos como en la Figura 5.15 en los que aún después de la remoción de ciclos anuales y semi anuales, se pueden apreciar oscilaciones (aunque significativamente disminuidas).



**Figura 5.15** Función de autocorrelación del análisis de  $f_oF2$  durante el amanecer teniendo en cuenta el método directo y los términos “ACS”.

Otro punto importante a tomar en cuenta es el de la correlación lineal entre el modelo y los datos. Dado que en todos los modelos se utiliza la serie  $F10.7_t$ , para analizar cómo es que cada término mejora el ajuste, basta con comparar los valores de correlación entre los casos “A”, “C” y “S” con “N”.

En la Tabla 5.5 se muestran los porcentajes de variación de la correlación lineal para los diferentes términos del modelo. De esta manera se puede apreciar claramente en que medida cada término mejoró o empeoró el ajuste.

	10-14 h			16-20 h			4-8 h		
	C	A	S	C	A	S	C	A	S
<b>Método de Bremer</b>									
$h_m F2$	3.20%	0.76%	19.21%	8.22%	0.56%	7.10%	8.04%	10.80%	4.77%
$f_o F2$	13.34%	0.94%	-0.13%	32.08%	1.54%	-0.69%	22.93%	1.66%	-0.15%
$N_m F2$	12.43%	0.68%	-0.14%	30.02%	1.37%	-0.86%	20.88%	1.66%	-0.15%
<b>Método Directo</b>									
$h_m F2$	2.38%	0.13%	3.57%	6.82%	0.13%	1.18%	3.73%	2.54%	0.00%
$f_o F2$	13.29%	0.81%	0.00%	30.32%	1.01%	0.00%	22.93%	1.66%	0.00%
$N_m F2$	12.38%	0.54%	0.00%	28.36%	0.67%	0.00%	20.88%	1.66%	0.15%

**Tabla 5.5** Porcentajes de variación de la correlación lineal para las diferentes series.

En las Tablas 5.2, 5.3 y 5.4 se puede apreciar que en los dos métodos, el modelo “ACS” presenta mayores valores de correlación, menores valores de autocorrelación y dispersión del error de ajuste y menores valores en la incertidumbre de la tendencia en comparación a los modelos que involucran menos términos en el ajuste. En éste sentido, los valores calculados con el método directo presentan una ligera ventaja respecto al método de Bremer. El análisis sugiere entonces, que se alcanzan mejores valores de correlación y se cumple mejor con los supuestos del modelo AR(1) cuando se utilizan los términos “ACS” (todas series de tiempo propuestas para el modelo empírico). En la Tabla 5.6 se muestran los valores estadísticos del ajuste del modelo “ACS”.

	$h_m F2$			$f_o F2$			$N_m F2$		
	4-8h	10-14h	16-20h	4-8h	10-14h	16-20h	4-8h	10-14h	16-20h
$\omega$	<b>-2.284</b>	<b>-0.463</b>	<b>-0.522</b>	<b>-0.015</b>	<b>-0.038</b>	<b>-0.046</b>	<b>-0.002</b>	<b>-0.009</b>	<b>-0.010</b>
$\sigma_o$	0.056	0.073	0.083	0.002	0.004	0.002	0.000	0.001	0.001
$\rho$	0.630	0.800	0.824	0.822	0.849	0.783	0.807	0.838	0.769
$\phi$	0.355	0.488	0.525	0.390	0.596	0.515	0.418	0.588	0.516
$\sigma_N$	22.258	23.640	29.852	0.731	1.125	1.026	0.112	0.270	0.225
$T_{\min}$	2.402	8.100	8.806	7.199	6.157	4.641	8.380	6.135	4.706
$T_{\max}$	2.539	8.655	9.416	7.627	6.649	4.958	8.898	6.622	5.029

**Tabla 5.6** Parámetros estadísticos del ajuste del modelo “ACS” utilizando el método directo.

Los coeficientes de ajuste del modelo “ACS” se muestran la Tabla 5.7. Es evidente que la serie  $U_i$  sólo es útil para modelar a  $h_m F2$ . Vemos además, que el desplazamiento de la serie de tiempo es de hasta 32 km para el medio día.

Para apreciar el ajuste realizado, se removieron las series calculadas utilizando el modelo “ACS” de las series originales, dejando únicamente el término correspondiente a la tendencia (Figura 5.16, 5.17 y 5.18), de forma que las series obtenidas representen (si los supuestos iniciales se cumplieran) los efectos de la contracción de la termósfera sobre los diferentes

parámetros analizados. Sin embargo, dado que los supuestos sólo se cumplen de manera aproximada, las series posiblemente están correlacionadas con varios fenómenos que no se han incluido en el modelo, y con algunos que sí, pero dependan de una manera no lineal.

	$h_m F2$			$f_o F2$			$N_m F2$		
	4-8h	10-14h	16-20h	4-8h	10-14h	16-20h	4-8h	10-14h	16-20h
$\mu$	277.527	311.295	291.229	3.390	5.023	6.501	0.071	0.125	0.493
$x_{Ap}$	0.358	0.168	0.192	0.010	0.015	0.011	0.002	0.003	0.002
$x_{Sa1}$	-3.579	-1.305	-0.701	0.349	0.076	-0.004	0.052	0.019	-0.001
$x_{Sa2}$	2.306	-7.412	-15.836	-0.685	-1.090	-1.115	-0.093	-0.243	-0.230
$x_{Ss1}$	-4.090	-0.061	6.404	-0.054	0.016	0.115	-0.011	0.000	0.023
$x_{Ss2}$	4.224	-3.947	-12.784	-0.403	-0.544	-0.350	-0.056	-0.121	-0.067
$x_U$	-1.690	-32.150	-26.823	0.196	0.198	0.150	0.025	0.052	0.038
$x_{F10.7}$	0.210	0.611	0.882	0.018	0.036	0.021	0.003	0.009	0.005

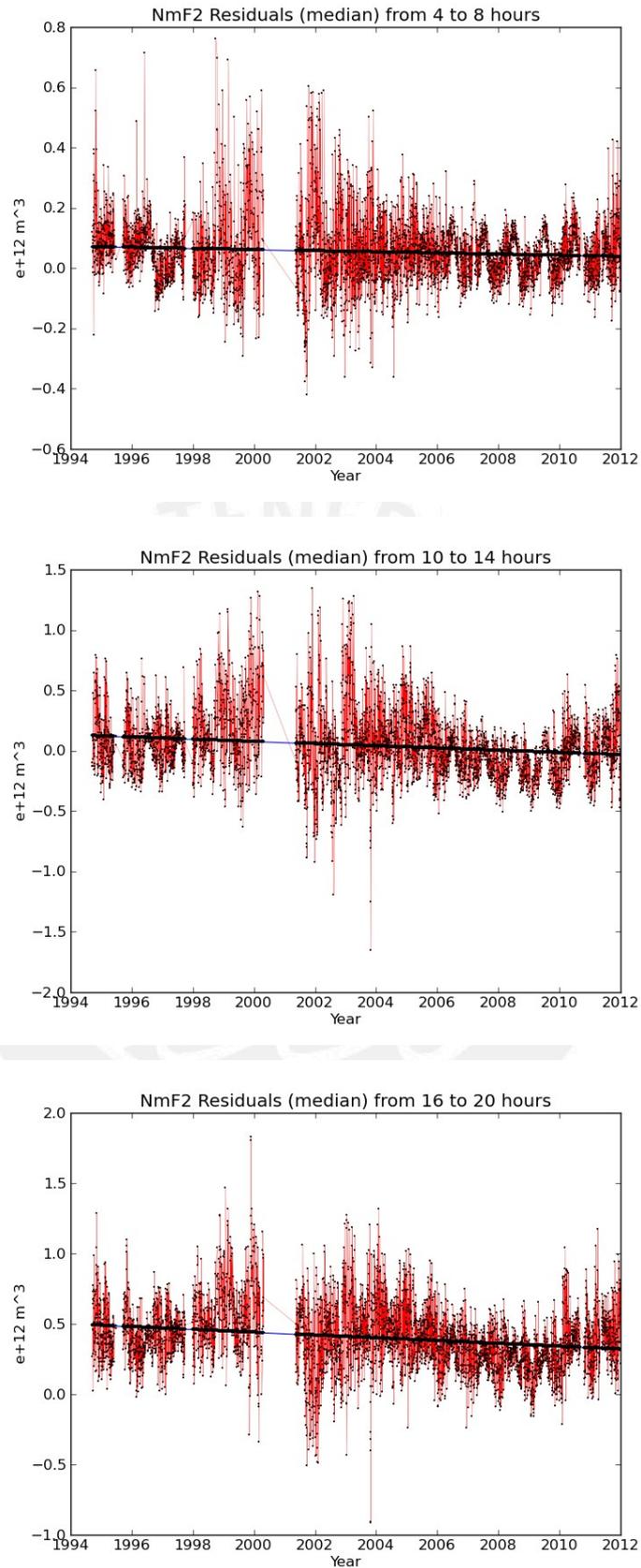
**Tabla 5.7** Coeficientes del ajuste del modelo “ACS” para las diferentes series, utilizando el método directo.

En las gráficas de  $h_m F2$  se puede apreciar fácilmente la pendiente negativa, especialmente para el caso del medio día debido a que la serie muestra una menor dispersión. Un caso interesante es el de  $h_m F2$  durante el amanecer, en donde vemos que la pendiente es mucho menor y la correlación con el modelo significativamente menor que en los demás casos analizados.

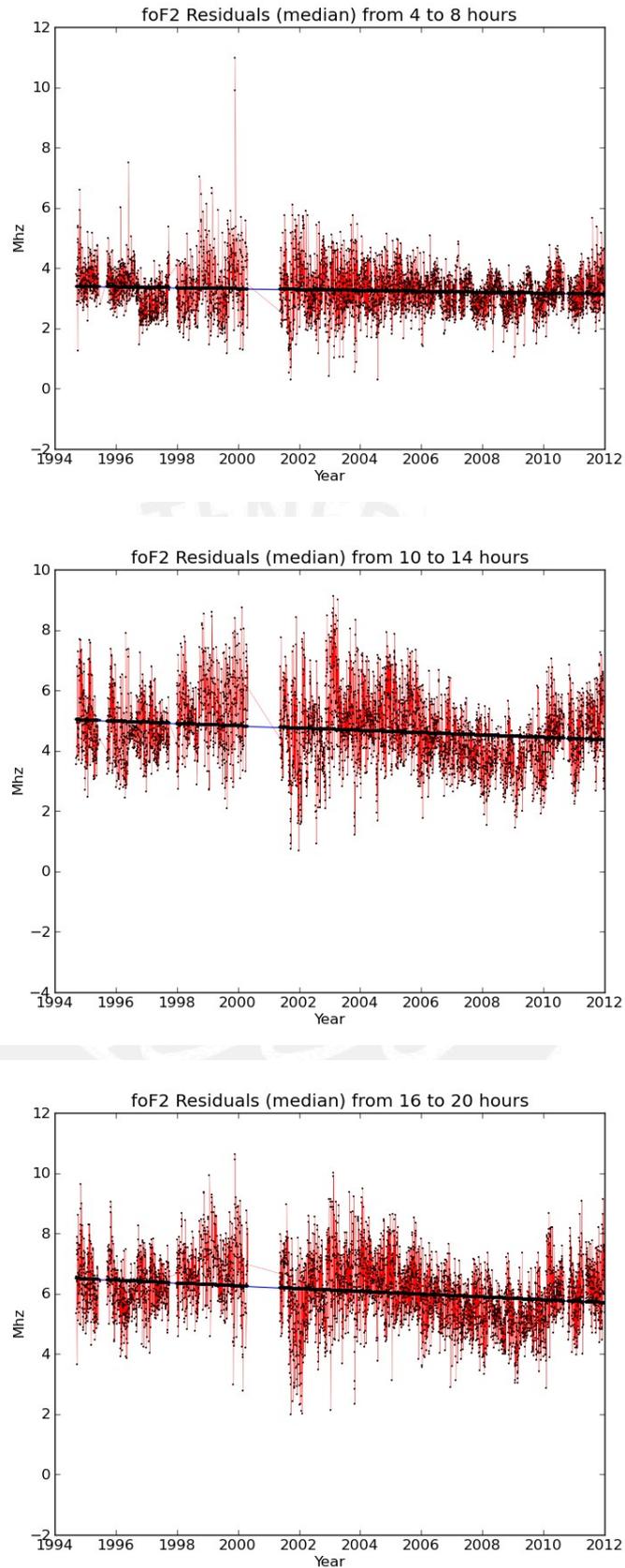
Viendo las figuras 5.16, 5.17 y 5.18 y la Tabla 5.6, se pueden identificar varias características interesantes:

- Las pendientes calculadas para las series correspondientes al atardecer son mayores que las calculadas para el medio día. De acuerdo a la hipótesis inicial, esto parece indicar que los efectos de la contracción de la termósfera se pueden apreciar mejor en mediciones cercanas al atardecer.

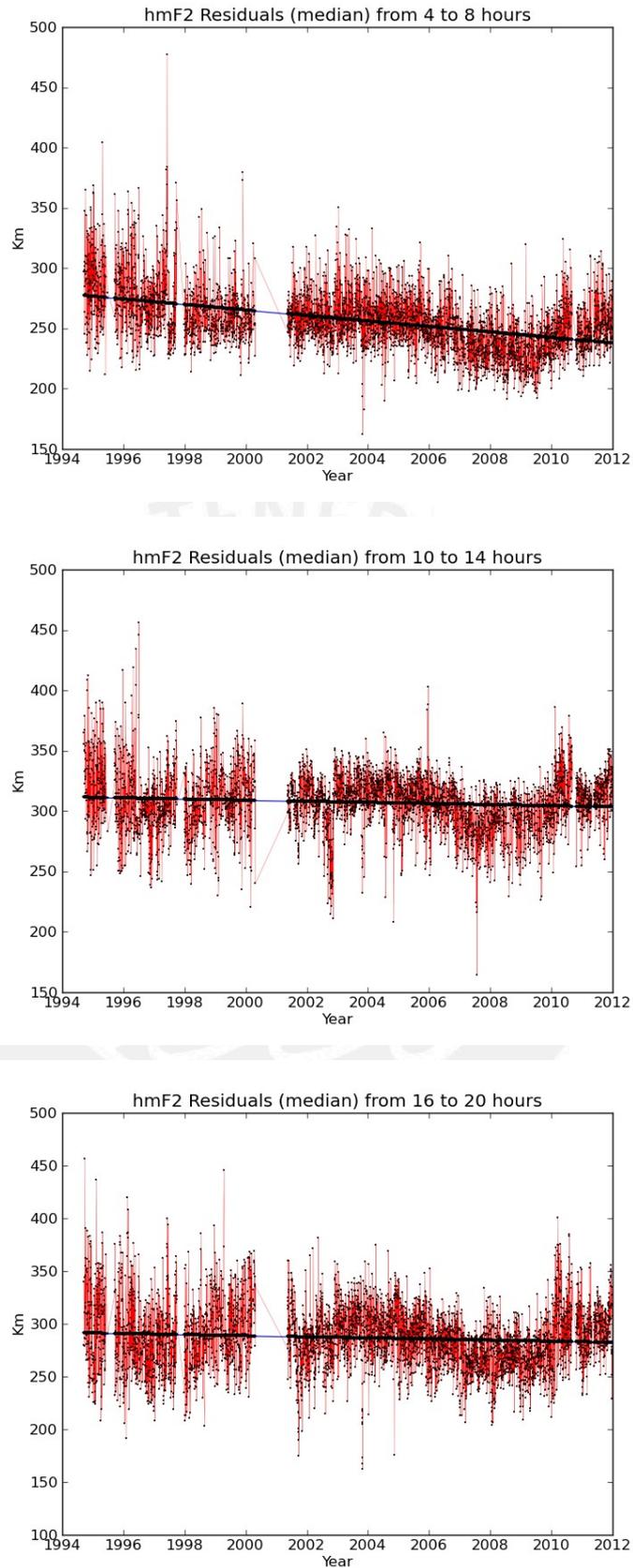
- Las funciones de autocorrelación calculadas para las series correspondientes al amanecer son las que poseen valores menores. Si los supuestos del modelo AR(1) se cumplen, entonces podríamos decir que los fenómenos que no fueron modelados pero si afectan a las series correspondientes al amanecer, pueden despreciarse en el modelamiento, es decir, el residuo del ajuste con el modelo “ACS” está más cerca a ser un proceso aleatorio con distribución normal y memoria de sólo un día.



**Figura 5.16** Residuos del ajuste de las series de  $N_mF2$  con el modelo directo y utilizando el modelo “ACS” .  
 Arriba: 4-8 horas. Medio: 10-14 horas. Abajo: 16-20 horas.



**Figura 5.17** Residuos del ajuste de las series de foF2 con el modelo directo y utilizando el modelo “ACS” .  
Arriba: 4-8 horas. Medio: 10-14 horas. Abajo: 16-20 horas.



**Figura 5.18** Residuos del ajuste de las series de hmF2 con el modelo directo y utilizando el modelo “ACS” .  
Arriba: 4-8 horas. Medio: 10-14 horas. Abajo: 16-20 horas.

En la Figura 5.16 podemos notar que la serie de  $N_m F2$  toma valores negativos. Como se indicó antes, existía la posibilidad de que  $N_m F2$  no pudiera ser representado satisfactoriamente por el modelo utilizado. Sin embargo, se puede estimar la tendencia y el error correspondiente a partir de las relaciones propuestas en (5.15), luego:

$$\frac{\Delta f_o F2}{f_o F2} = \frac{\Delta N_m F2}{2 N_m F2} \tag{5.24}$$

Dado que las pendientes se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \omega_{N_m F2} &= \frac{\Delta N_m F2}{N_m F2_i} \frac{N_m F2_i}{\Delta T} \\ \omega_{f_o F2} &= \frac{\Delta f_o F2}{f_o F2_i} \frac{f_o F2_i}{\Delta T} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Donde  $f_o F2_i$  y  $N_m F2_i$  son los términos iniciales de cada una de las series, podemos decir que:

$$\frac{\omega_{N_m F2}}{\mu_{N_m F2}} = \frac{2 \omega_{f_o F2}}{\mu_{f_o F2}} \quad \text{con} \quad \mu_{f_o F2} \approx f_o F2_i \quad \text{y} \quad \mu_{N_m F2} \approx N_m F2_i \tag{5.26}$$

Vemos que los valores de  $\mu$  corresponden a las intersecciones con el eje de las ordenadas ( $t=0$ ), provenientes del ajuste realizado. Por último utilizando la relación entre densidad de electrones y frecuencia del plasma, podemos hallar la relación entre las pendientes de  $N_m F2$  y  $f_o F2$ :

$$\mu_{N_m F2} = \frac{\mu_{f_o F2}^2}{80.6} \Rightarrow \omega_{N_m F2} = \frac{2 \omega_{f_o F2} \mu_{f_o F2}}{40.6} \tag{5.27}$$

Con esta expresión podemos construir una nueva tabla, con nuevos valores de  $N_m F2$  (Tabla 5.8).

	4-8h	10-14h	16-20h
$\omega_{N_m F2}$	-0.001	-0.001	-0.007

**Tabla 5.8** Nuevos valores del ajuste, calculando la tendencia en  $N_m F2$  ( $10^{12} m^{-3}$ ) a partir de la de  $f_o F2$ .

Se puede notar que los nuevos valores de las tendencias de  $N_m F2$  para los diferentes intervalos, son de casi la mitad de los calculados anteriormente en los tres casos. Esto sugiere que el modelo aplicado en el ajuste de la serie de  $N_m F2$  estaría sobreestimando la pendiente.

Gracias a las estimaciones de Elías (2009) y Cnossen (2008), podemos refinar un poco más las estimaciones de tendencias causadas por la contracción de la termósfera. Si representamos la tendencia medida, la tendencia causada por contracción y la causada por la tendencia en el campo geomagnético con  $\omega_m$ ,  $\omega_c$  y  $\omega_g$  respectivamente, tendremos que:

$$\omega_m \approx \omega_c + \omega_g \Rightarrow \omega_c \approx \omega_m - \omega_g \quad (5.28)$$

Luego, es necesario restar las tendencias causadas por las variaciones de las líneas de campo geomagnético para mejorar la estimación de las tendencias causadas por la contracción de la termosfera. Para estimar la tendencia en  $N_m F2$  a partir de la de  $f_o F2$  utilizando la Tabla 5.1, diremos que  $k_{G,f_o F2}$  representa la tasa de variación de  $f_o F2$  causada por cambios en el campo geomagnético. Luego, podremos calcular  $k_{G,f_o F2}$  a partir de:

$$k_{G,f_o F2} \Delta T = \frac{\omega_{G,f_o F2}}{u_{f_o F2,G}} = \frac{f_o F2_f - u_{f_o F2,G}}{u_{f_o F2,G}} \Rightarrow u_{f_o F2,G} = \frac{f_o F2_f}{\Delta T k_{G,f_o F2} + 1} \quad (5.29)$$

Ya que los estudios de Elías y Cnossen se concentran en el intervalo de 1950 al 2000,  $f_o F2_t$  corresponde al valor más representativo de  $f_o F2$  en el año 2000. En este trabajo utilizaremos el valor que toma  $f_o F2$  en el ajuste lineal para representar  $f_o F2_t$  (6.9 MHz). Luego, la pendiente de  $f_o F2$  debido a las variaciones geomagnéticas puede ser estimada por la siguiente expresión:

$$\omega_{G,f_o F2} = \frac{k_{G,f_o F2} f_o F2_f}{\Delta T k_{G,f_o F2} + 1} \quad (5.30)$$

A partir de esta expresión y haciendo uso de las relaciones conocidas entre  $f_o F2$  y  $N_m F2$ , podemos decir que:

$$\omega_{G,N_m F2} = \frac{k_{G,N_m F2} f_o F2_f^2}{40.3(2 \Delta T k_{G,N_m F2} + 1)} \quad (5.31)$$

Finalmente, la Tabla 5.9 muestra los valores de las tendencias de  $h_m F2$ ,  $f_o F2$  y  $N_m F2$  causadas por la contracción de la termosfera tomando en cuenta las variaciones del campo magnético halladas por Cnossen y Elías.

	$h_m F2$	$f_o F2$	$N_m F2$
$\omega$	-0.263	-0.033	-0.008

**Tabla 5.9** Valores de tendencia correspondientes a la contracción de la ionósfera en km para  $h_m F2$ , MHz para  $f_o F2$  y en unidades de  $10^{12} m^{-3}$  para  $N_m F2$ .

Las simulaciones dirigidas por Qian predicen variaciones de entre 18 y 22 km en  $h_m F2$  y de entre 14 y 18% para  $N_m F2$  en caso la concentración de  $CO_2$  se doble. En dicho estudio, Qian se basó en predicciones realizadas por el IPCC (“Intergovernmental Panel on Climate Change”), en el cual estimó que se alcanzarían estas concentraciones en aproximadamente 100 años. Las pendientes halladas indican que en este tiempo habría una variación de aproximadamente 26 km en  $h_m F2$  y de alrededor del 50% en  $N_m F2$ . A pesar de que el estimado para  $N_m F2$  dista significativamente del de Qian, el de  $h_m F2$  muestra una similitud

importante.

Los últimos cálculos han sido realizados bajo varios supuestos. En el siguiente capítulo se hará un breve comentario sobre las limitaciones del análisis realizado.



## 6 DISCUSIÓN

La alta complejidad de la evolución de la dinámica de la ionósfera exige por lo general plantear supuestos que simplifiquen el análisis, más aún cuando se trata de estimaciones de largo plazo.

En este capítulo se discutirá acerca de la interpretación y limitaciones de los resultados, los supuestos del análisis realizados y las mejoras que se proponen para un posible trabajo futuro.

### 6.1) SOBRE LOS RESULTADOS

Lo primero que se debe resaltar es que a diferencia de otros estudios, en este trabajo se decidió no utilizar filtros mensuales (promedios mensuales), principalmente debido a que Lastovicka (2006) y Weatherhead (1998) indican que las series construidas en base a promedios, suelen presentar tendencias más altas debido a aumentos artificiales en las pendientes.

Como se indicó en el capítulo anterior, las expresiones calculadas para la incertidumbre de las pendientes son sólo válidas cuando se utiliza el método de Bremer y se asume que el residuo puede modelarse como un proceso AR(1). Luego, ya que se eligió el Método Directo para obtener los resultados finales, las incertidumbres calculadas con los métodos descritos en el capítulo 3 serán en el mejor de los casos, cotas inferiores. Esto se debe a que en el Método Directo se utiliza un modelo diferente al que se empleó para hallar de manera analítica las expresiones del capítulo 3. Los términos adicionales del Método Directo incrementan inevitablemente la incertidumbre asociada a la estimación de la pendiente.

Respecto a las características propias de los diferentes intervalos analizados, cabe indicar que si bien se utilizaron series que en principio están relacionadas con procesos físicos presentes a lo largo del día, existen diferentes dependencias con otros procesos que no fueron tomados en cuenta, por ejemplo, la influencia de los vientos atmosféricos puede jugar un papel más importante en el intervalo del atardecer que en los del amanecer y medio día.

Como se comentó al inicio del capítulo 5, es difícil comparar los resultados obtenidos en este trabajo con otros obtenidos en estudios sobre otras regiones geográficas, sin embargo, el orden de magnitud de las tendencias así como el de las incertidumbres cae dentro del rango

de resultados obtenidos en proyectos similares (Bremer, 1992; Rishbeth, 1997; Ulich, 1997; Danilov, 1998; Bremer, 2004; Mahajan, 2007; Akala, 2010; Bremer, 2011; Lastovicka, 2012).

Se pudo determinar que el término que modela el desplazamiento causado por el cambio del instrumento, es de vital importancia en la serie de  $h_mF2$  del medio día. Se calculó un desplazamiento de 32 km a partir del ajuste. Luego de buscar el origen de este desplazamiento en los archivos .sao, se encontró que luego de cambiar el sistema de adquisición, se alteró también el parámetro “initial range” en 30 km. Este parámetro controla la altura referencial con la cual se reconstruyen los perfiles de densidad. Si bien el cambio de dicho parámetro inicial afecta el resto de las mediciones aun no se ha podido determinar por qué es que el intervalo del medio día es el más afectado.

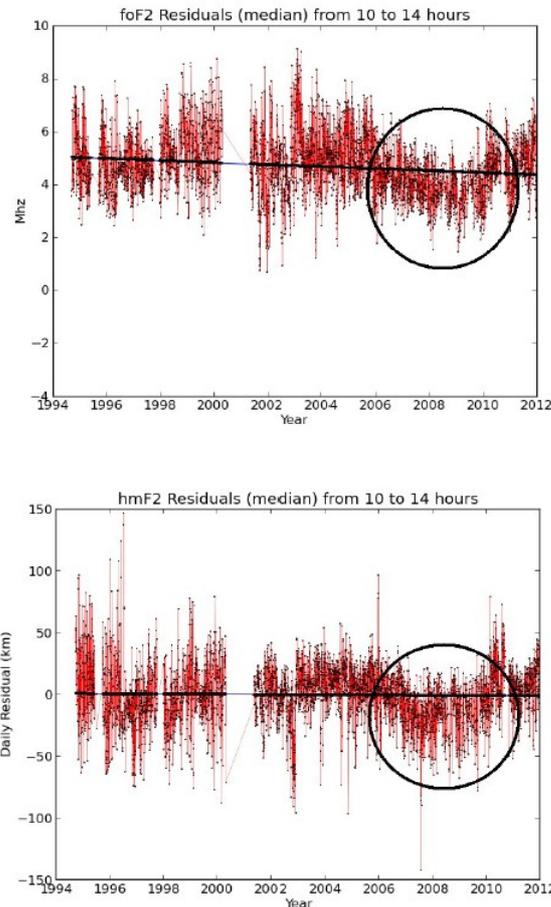
## 6.2) SOBRE LAS LIMITACIONES Y SUPUESTOS

Uno de los supuestos más fuertes en el modelo planteado es el de asumir que los ciclos anuales y semi anuales de los vientos termosféricos pueden modelarse con simples funciones armónicas. A pesar de que Rishbeth (2000) demuestra de manera muy clara la influencia física de éstas oscilaciones sobre los parámetros de la ionósfera analizados, las amplitudes no son las mismas a lo largo de la serie. Esto puede notarse claramente en el hecho de que luego de la remoción de las series armónicas planteadas, aún se puedan identificar oscilaciones anuales y semi anuales (aunque muy pequeñas) en la función de autocorrelación de los residuos del ajuste.

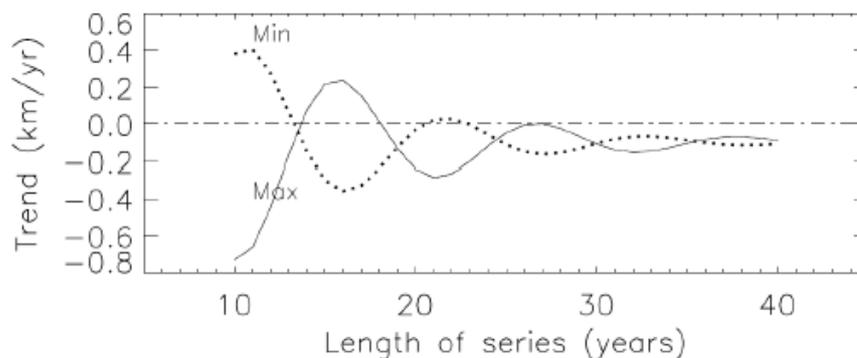
Otro supuesto importante es el de la capacidad de la serie de F10.7 cm de modelar la influencia de los ciclos solares. Por un lado, se han planteado series más efectivas para esta tarea (Chen, 2011; Mielich, 2013). Por otro lado, se ha determinado que alrededor del año 2008 sucedió un inusual enfriamiento de la termosfera (Emmert, 2011; Solomon, 2011) que habría sido causado por fenómenos terrestres y no por variaciones en la actividad solar. Podemos apreciar esta anomalía en la Figura 6.1.

Esta anomalía presente en las series influye de manera importante en el valor de las tendencias calculadas, haciendo que el valor real sea mayor al hallado en el ajuste. Esto podría contribuir en la justificación de las discrepancias con los resultados del modelo numérico de Qian, especialmente para el caso de  $N_mF2$ . Por último, Clilverd (2003) señala que al modelar las series de tiempo con funciones armónicas y actividad solar, se presenta un

fenómeno de “ringing”, es decir, la dependencia entre las tendencias calculadas y el tamaño de la serie tiene un comportamiento equivalente al de una oscilación amortiguada (Figura 6.2). Esto indica que las tendencias serán más consistentes cuanto más larga sean las series utilizadas.



**Figura 6.1** Series de  $f_oF2$  y  $h_mF2$  para el medio día en las gráficas de arriba y abajo respectivamente. Se indican con un círculo las regiones afectadas por el enfriamiento anómalo de la termósfera.



**Figura 6.2** La línea continua corresponde a la serie comenzando de un máximo, mientras que la punteada de un mínimo solar. Se representa las tendencias calculadas a partir de una serie simulada con tendencia de  $-0.1$  km/año (Clilverd, 2003).

En el capítulo 3 se mostró que la función de autocorrelación de los residuos de un proceso AR(1) sigue un decaimiento exponencial descrito por:

$$\rho_k = \varphi^k \quad k > 0 \quad (6.1)$$

Donde  $\varphi$  denota la autocorrelación cuando el desfase es igual a 1. Sin embargo, vemos en la Figura 5.14 que el decaimiento no es tan pronunciado como lo exige el modelo teórico. Esto podría ser una señal que el error de ajuste de las series analizadas sería mejor modelado con un proceso AR(p) de mayor orden como lo sugiere Emmert (2011). De ser así, la estimación de la incertidumbre asociada a las tendencias exigiría un análisis significativamente más complejo.

Es necesario aclarar que en los trabajos de Elías y Qian (cuyos resultados fueron utilizados en nuestro análisis), se asumieron valores constantes para F10.7. Esto claramente limita la aplicabilidad de sus resultados, sin embargo, dado que las series de tiempo analizadas aquí fueron construidas en un período de tiempo en el que sucedieron dos mínimos solares y sólo un máximo (sin mencionar la asimetría que produce el enfriamiento anómalo que se extiende desde mediados del 2006 hasta mediados del 2009), se decidió trabajar con los resultados obtenidos en dichos trabajo correspondientes a los mínimos solares.

Por último, probablemente el supuesto más fuerte realizados en nuestro análisis, fue el de asumir una tendencia constante para contracción de la termósfera. Lastovicka (2012), plantea que existen diversos fenómenos que podrían estar involucrados en la tendencia y no fueron tomados en cuenta aquí, por ejemplo las variaciones de la concentración de vapor de agua en la atmósfera y el ozono e inclusive la variación misma de la concentración de CO<sub>2</sub>, que al parecer presenta una variación exponencial en lugar de una constante.

Es necesario indicar además, que aunque los valores de tendencia en h<sub>m</sub>F2 sean similares a los calculados de manera teórica, no es suficiente para establecer una relación de causalidad. Si bien nuestros resultados apoyan las hipótesis de Roble y Rishbeth sobre la contracción de la termósfera, para poder concluir que las tendencias calculadas en este trabajo son causadas por este fenómeno, se tendría además que demostrar que la contribución de otros procesos no es significativa.

### 6.3) SOBRE LAS MEJORAS PROPUESTAS

Existen numerosas sugerencias en los diferentes estudios relacionados a este tema, por lo que nos limitaremos a mencionar las que podrían contribuir a disminuir las limitaciones y

supuestos de este trabajo en particular:

- Construir series de tiempo más grandes (al menos dos ciclos solares para contrarrestar el efecto de “ringing”) y de diferentes estaciones contiguas.
- Realizar el cálculo teórico de las incertidumbres asociadas al Método Directo.
- Estudiar la posibilidad de modelar los residuos del ajuste con procesos AR(p) de mayor orden y evaluar si existen mejoras importantes.
- Emplear funciones más generales para el modelamiento de los vientos termosféricos o realizar un proceso de filtrado de frecuencias.
- Volver a procesar los ionogramas adquiridos utilizando el nuevo ARTIST 5 para mejorar las estimaciones de  $h_mF2$  y  $f_oF2$  y posiblemente obtener series de tiempo más robustas.
- Usar modelos más completos para la tendencia, específicamente probar rectas definidas por tramos.
- Estimar el error debido al instrumento (ionosonda) y cómo se propaga a través del algoritmo de inversión.
- Intentar remover el mínimo local del 2008 (enfriamiento anómalo) y recalcular las tendencias.

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la capacidad de las series de tiempo construidas utilizando la ionosonda del Radio Observatorio de Jicamarca para determinar si es que podía indentificarse el impacto del enfriamiento de la termósfera en las tendencias de diferentes parámetros como  $h_mF2$ ,  $f_oF2$  y  $N_mF2$ .

La ionósfera es un sistema sumamente complejo debido a las numerosas interacciones con otros sistemas igualmente difíciles de modelar. Esta complejidad nos obliga a plantear aproximaciones y supuestos que en ocasiones hacen que la interpretación de los resultados sea un trabajo muy complicado.

Como se vió en la primera aproximación al problema, antes de realizar un ajuste lineal a la series de tiempo en cuestión, es necesario plantear un modelo coherente con la física del sistema, así como para el error del ajuste. Vimos que el modelo AR(1) es bastante adecuado para representar la serie de residuos, además, nos permitió calcular expresiones analíticas para las incertidumbres de las tendencias buscadas.

El modelo de ajuste que mejores resultados obtuvo fue el llamado Método Directo, que consiste en ajustar una serie de tiempo compuesta por la serie de F10.7, funciones armónicas para representar los vientos termosféricos, una función escalón y la actividad geomagnética. Utilizando este método se encontraron tendencias y sus incertidumbres, correlación lineal con el modelo, dispersión del error y el tiempo estimado para obtener dicha tendencia al 95% de confianza (Tabla 5.6).

Las pendientes halladas muestran la variación de las series estudiadas, sin embargo, existe la posibilidad de que estén involucrados diversos procesos que no fueron tomados en cuenta en el modelo. Los estudios de Elías (2009) y Cnossen (2008), se enfocan en estimar la magnitud de las tendencias presentes en  $h_mF2$ ,  $f_oF2$  y  $N_mF2$  causadas por la variación de las líneas del campo geomagnético. Con éstos nuevos resultados se hallaron nuevas tendencias que mostraron una mayor similitud con las calculadas por las simulaciones de Qian (2009).

Entre las limitaciones principales del análisis, se encuentra el hecho de que las series de tiempo son significativamente más pequeñas en comparación a las utilizadas en estudios similares. Bencze (2005) y Clilverd (2003) sugieren la utilización de series de al menos dos ciclos completos de actividad solar. Por otro lado, está el supuesto de la monotonía de la

pendiente, Lastovicka (2012) sugiere para mejorar este aspecto, la utilización de recta definidas por tramos.

Es claro entonces, que a pesar de las limitaciones relativas a los errores instrumentales y el corto tiempo de medición, ha sido posible plantear un análisis adecuado para la obtención de tendencias coherentes con las simulaciones numéricas de vanguardia y estudios similares correspondientes a esta región del planeta.



## 7 BIBLIOGRAFÍA

Akala A. O., Oyeyemi E. O. (2010), Variability of foF2 in the African Equatorial Ionosphere, *Advances in Space Research* 45, 1311-1314.

Akmaev R. A. (2002), Modeling the cooling due to CO<sub>2</sub> increases in the mesosphere and lower thermosphere, *Physics and Chemistry of the Earth* 27, 521- 528.

Akmaev R. A., Fomichev V. I. (1998), Cooling of the mesosphere and lower thermosphere due to doubling of CO<sub>2</sub>, *Ann. Geophysicae* 16, 1501-1512.

Bencze P. (2005), On the Long Term Change of Ionospheric Parameters, *Journal Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 67, 1298-1306.

Box G., Jenkins G. and Reinsel G. (1994), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Prentice-Hall International Inc.

Brasseur G. (1988), Ozone Reduction in the 1980s: a model simulation of anthropogenic and solar perturbations, *Geophysical Research Letters* 15 (12), 1361-1364

Bremer J. (1992), Ionospheric trends in mid latitudes as a possible indicator of the atmospheric greenhouse effect, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics* 54 (11/12), 1505-1511

Bremer J., Alfonsi L. (2004), Long Term Trend in the Ionosphere Upper Atmosphere Parameters, *Annals of Geophysics supplement* 47 (2/3), 1009-1029.

Bremer J., Damboldt T. (2011), Comparing long term trends in the ionospheric F2 region with two different methods, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*.

Buonsanto M.J. (1999), Ionospheric Storms, *Space Science Reviews* 88, 563-601.

Chen Francis F. (1984), *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Kluwer Academic/ Plenum Publisher.

Clilverd M. A., Ulich T. and Jarvis M. J. (2003), Residual Solar Cycle Influence on Trends in Ionospheric F2 Layer Peak Height, *Journal of geophysical research* 108 (A12), 1450

Cnossen I., Richmond A. D. (2008), Modelling the Effects of Changes in the Earth's Magnetic Field From 1957 to 1997 on the ionospheric hmF2 and foF2 parameters, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 70, 1512- 1524.

Danilov A. D. (1998), Review of long term trends in the upper mesosphere, thermosphere and ionosphere, *Adv. Space Res.* 22 (6), 907-915.

Dickinson R. E. (1984), Infrared Radiative Cooling in the Mesosphere and Lower Thermosphere, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics* 46 (11), 995-1008.

Dickinson R. E., Roble R. G. and Bougher S. W. (1987), Radiative Cooling in the NLTE Region of the Mesosphere and Lower Thermosphere, *Adv. Space Res.* 7 (10), 10(5)- (10)15.

Elias A. G (2009), Trends in the F2 ionospheric layer due to long term variations in the earth's magnetic field, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 71, 1602- 1609.

Emmert J. T. and Picone J. M. (2011), Statistical Uncertainty of 1967-2005 Thermospheric Density Trends Derived from Orbital Drag, *Journal of Geophysical Research* 116, A00H09.

Fels S., Mahlman J. (1980), Stratospheric Sensitivity to Perturbations in Ozone and Carbon Dioxide, *Journal of the atmospheric sciences* 37, 2265-2297.

Gombosi T. I. (2004) *Physics of the Space Environment*, University of Cambridge.

Hargreaves J.K. (2003) *The solar-terrestrial environment*, University of Lancaster.

Hedin A. E (1987) MSI-86 Thermospheric Model, *Journal of Geophysical Research* 92.

Huang X. and Reinisch B. W. (1996), Vertical Electron Density Profiles from the Digisonde Network, *Adv. Space Res.* 18 (6), 121-129.

Huang X. and Reinisch B. W. (2001), Vertical Electron Content from Ionograms in Real Time, *Radio Science* 36 (2), 335-342.

Jackson (1999), *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc.

Jarvis M. J. (2009), Longitudinal variation in E and F region ionospheric trends, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 71, 1415-1429.

Keating B., O'dell C. (2000) A limit on the large angular scale polarization of the cosmic microwave background, *The Astrophysical Journal* 560, L1-L4.

Kelley M. C., Ilma and Crowley (2009) On the Origin of Pre Reversal Enhancement of the Zonal Equatorial Electric Field, *Ann. Geophys.* 27, 2053-2056.

Kudeki Erhan (2004) *Applications of Radiowave Propagation*, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Lastovicka J. , Mikhailov A. (2006), Long term trends in foF2: A comparison of various methods, *Journal of Atmospheric and Solar- Terrestrial Physics* 68, 1854-1870.

Lastovicka J. , Solomon S. and Qian L. (2012) Trends in the Neutral and Ionized Upper Atmosphere, *Space Sci Rev.* 168, 113-145.

Lastovicka J. (2005), On the Role of Solar and Geomagnetic Activity in Long Term Trends in the Atmosphere Ionosphere System, *Journal of Atmospheric and solar Terrestrial Physics* 67, 83-92.

Mahajan K., Kumar A. ( 2007), Long term trend in the upper atmosphere and ionosphere: Models and observations, *Indian Journal of Radio & Space Physics* 36, 543-555.

McNamara L. F. (2008), Accuracy of Models of hmF2 Used for Long-Term Trend Analyses, *Radio Science* 43, RS2002.

Mielich J. and Bremer J. (2013), Long-Term Trends in the Ionospheric F2 Region with Different Solar Activity Indices, *Ann. Geophys* 31, 91-303.

Papanicolau A. (2009) *Taylor Approximation and the Delta Method*, Stanford University.

Pedatella N. M., Forbes J. M. (2011), Longitudinal Variations in the F Region Ionosphere and the Topside Ionosphere Plasmasphere, *Journal of Geophysical Research* 116, A12309.

Poole Ian (2002) Understanding Solar Indices, The national association for Amateur Radio. Press W. H., Teuloisky S. A. (1997), Numerical Recipes in Fortran 77: The art of scientific computing, University of Cambridge.

Qian L., Burns A. G. (2009), The effect of carbon dioxide cooling on trends in the F2 layer ionosphere, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics 71, 1592-1601.

Qian L., Solomon S. C. (2008), Model Simulations of Global Change in the Ionosphere, Geophysical Research Letters 35, L07811.

Reinisch B. (2009) Lowel Digisonde International.

Reinisch B. and Xueqin H. (1982), Automatic Calculation of Electron Density Profiles from Digital Ionograms 1, Radio Science 17 (2), 421-434.

Reinisch B. and Xueqin H. (1983), Automatic Calculation of Electron Density Profiles from Digital Ionograms 3, Radio Science 18 (3), 477-492.

Reinisch B. W. and Huang X. (2001), Deducing Topside Profiles and Total Electron Content from Bottomside Ionograms, Adv. Space Res. 27 (1), 23-30.

Rishbeth H. (1990), A greenhouse effect in the ionosphere, Planet Space Sci. 38 (7), 945-948.

Rishbeth H. (1975), On the Theory of Diffusion in the Ionosphere, Geophys. J.R. astr. Soc. 41, 311-317

Rishbeth H. (1997), Long term changes in the ionosphere, Adv. Space Res. 20 (11), 2149-2155.

Rishbeth H. and Roble R.G. (1992) Cooling in the Upper Atmosphere by Enhanced Greenhouse Gases – Modelling of thermospheric and ionospheric effects, Planet Space Sci 40 (7), 1011-1026

Rishbeth H., Muller-Wpdarg I. C. F. (2000), Annual and Semiannual Variations in the Ionospheric F2 Layer, Ann. Geophysicae 18, 945-956.

Roble R. G. (1989), How will changes in carbon dioxide and methane modify the mean structure of the mesosphere and thermosphere, *Geophysical Research Letters*, 16 (12), 1441-1444

Roble S. B. (1987), On the Global Mean Structure of the Thermosphere, *Journal of Geophysical Research* 92 (A8), 8745-8758.

Rubinstein R. Y., Kroese D. P. (2008), *Solution Manual to Accompany Simulation and the Montecarlo Method*, Wiley.

Schunk R. and Nagy A. (2009) *Ionospheres: Physics, Plasma Physics and Chemistry*, Cambridge Atmospheric and Space Series

Shumway R. H. and Stoffer D. S. (2006), *Time Series Analysis and its Applications*, Springer  
Tapping K. F. (1987), Recent Solar Radio Astronomy at Centimeter Wavelength, *Journal of geophysical Research* 92 (D1), 829-838

Tiao G.C., Reinsel G. C., (1990), Effects of autocorrelation and temporal sampling schemes on estimates of trend and spatial correlation, *Journal of Geophysical Research* 95(D12), 20,507-20,517.

Titheridge J. E. and Buonsanto M. J. (1980), Multistation observations of SITECs over a full solar cycle, *Journal of Geophysical Research* 85.

Ulich (2003), Determining long term change in the ionosphere, *Eos* 84 (52)

Ulich T. and Turunen E. (1997), Evidence for long term cooling of the upper atmosphere in ionosonde data, *Geophysical Research Letters* 24 (9), 1103-1106.

Weatherhead E. C., Reinsel G. C. (2000), Detecting the Recovery of Total Column Ozone, *Journal of Geophysical Research* 105 (D17), 22,201-22,210

Weatherhead E. C., Reinsel G. C. (1998), Factors affecting the detection of trends: Statistical considerations and applications to environmental data, *Journal of Geophysical Research* 103 (D14), 17,149-17,161.

Xueqin H. and Reinisch B. (1982), Automatic Calculation of Electron Density Profiles from Digital Ionograms 2, Radio Science 17 (4), 837-844.

